Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Álgebra Linear

Teste 2 - 29 de Novembro de 2011 [aula teórica]
Versão **D**
Duração: 40 minutos

Resolução

(1 val.) 1. Use a regra de Cramer para calcular (a incógnita) z no seguinte sistema:

$$\begin{cases} x - y - z & = & 0 \\ -x + y - 2z & = & 1 \\ 2x + 2y + z & = & 1. \end{cases}$$

Resolução

$$z = \frac{det(C_3)}{det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{1}{3}\ .$$

2. Considere a seguinte matriz de característica 2.

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(0.75 val.) (a) Encontre uma base de $Lin(B)$ e uma base de $Nuc(B)$.

Resolução Aplicando o Método de Eliminação de Gauss (MEG) a B

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -8 \\ 0 & -2 & -8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C. \end{aligned}$$

Uma base de $Lin(B)$ é dada pelas linhas não nulas de C, ou, equivalente,

$$((1,1,3),(0,1,4)).$$

Para $Nuc(B)$ obtemos o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+3z & = & 0 \\ -2y-8z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & -4z \end{array}\right. ,$$

pelo que

$$Nuc(B) = \{(z,-4z,z), z \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}(\{(1,-4,1)\})$$

e uma base de $Nuc(B)$ é dada por $\{(1,-4,1)\}$.

(0.75 val.) (b) Encontre as equações cartesianas de $Col(B)$.

Resolução O vector $v = (x,y,z)$ pertence a $Col(B)$ se e só se o sistema

$$Bu = v, \tag{1}$$

for possível. Apliquemos o MEG à matriz aumentada do sistema (1)

$$\begin{aligned} (B|v) &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 3 & y \\ 2 & 0 & -2 & z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & y \\ 3 & 1 & 1 & x \\ 2 & 0 & -2 & z \end{pmatrix} \\ &\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & y \\ 0 & -2 & -8 & x-3y \\ 0 & -2 & -8 & z-2y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & y \\ 0 & -2 & -8 & x-3y \\ 0 & 0 & 0 & -x+y+z \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

pelo que a equação cartesiana de $Col(B)$ (que coincide com a condição de solubilidade de (1)) é

$$-x+y+z=0 \ .$$

(0.5 val.) (c) Encontre uma base de $Col(B) \cap W$, onde

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x+y-z=0\}.$$

Resolução Uma vez que

$$Col(B) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ -x+y+z=0\},$$

obtemos

$$Col(B) \cap W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ -x+y+z=0; x+y-z=0\} = Nuc(A),$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Aplicando o MEG a A obtemos

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

O sistema para $Nuc(A)$ é então equivalente a

$$\left\{\begin{array}{rcl} -x+y+z & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array}\right. . \tag{2}$$

O conjunto solução de (2) é

$$Col(B) \cap W = Nuc(A) = \{(z,0,z), z \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}(\{(1,0,1)\}),$$

pelo que uma base deste subespaço vectorial é $\{(1,0,1)\}$.

(0.5 val.) (d) Use $Nuc(B)$ da alínea (a) e uma solução particular, na forma $v_1 = (x_1, 0, 0)$, do sistema

$$Bv = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

para encontrar o seu conjunto-solução.
Sugestão: caso não tenha encontrado $Nuc(B)$ na alínea (a), use $Nuc(B) = L(\{(1,3,3)\})$.

Resolução O conjunto solução do sistema não homogéneo (3) é

$$v_1 + Nuc(B)$$

onde v_1 é uma solução particular de (3). Substituindo $v_1 = (x_1, 0, 0)$ no sistema obtemos

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x_1 & = & 3 \\ x_1 & = & 1 \\ 2x_1 & = & 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x_1 = 1, \tag{4}$$

pelo que uma solução particular de (3) é $(1,0,0)$ e o conjunto solução

$$(1,0,0) + \{(z,-4z,z), z \in \mathbb{R}\}.$$

3. Diga, justificando, se os seguintes conjuntos têm estrutura natural de espaço vectorial

(0.5 val.) (a)

$$X = \{p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \ : \ 2p(1) - p(0) = -2\}$$

Resolução X não tem estrutura natural de espaço vectorial (induzida de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$) uma vez que o polinómio nulo não pertence a X : $0 \neq -2$.
Alternativamente, sejam $q, r \in X$ e $p = q + r$. Uma vez que

$$2p(1)-p(0) = 2(q(1)+r(1))-(q(0)+r(0)) = 2q(1)-q(0)+2r(1)-r(0) = -4 \neq -2,$$

concluímos que $q+r$ não pertence a X e portanto X não tem estrutura natural de espaço linear.

(0.5 val.)

(b)

$$Y = \{p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \ : \ 2p(1) - p(0) = 0\}.$$

Resolução Y tem estrutura natural de espaço vectorial. De facto, o polinómio nulo pertence a Y e, para $p = \alpha q + \beta r,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ q, r \in Y$, temos

$$\begin{aligned} 2p(1) - p(0) &= 2(\alpha q(1) + \beta r(1)) - (\alpha q(0) + \beta r(0)) = \\ &= \alpha(2q(1) - q(0)) + \beta((2r(1) - r(0))) = 0,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall q, r \in Y, \end{aligned}$$

pelo que Y é um subespaço vectorial de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e como tal tem a estrutura natural de espaço vectorial induzida de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

(0.5 val.) (c) Encontre um subespaço V de $\mathbb{R}^3$ isomorfo a Y da alínea (b). Mostre que de facto $V \cong Y$.

Resolução Sabemos que

$$\begin{aligned} \varphi \ : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \varphi(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) &= (a_0, a_1, a_2) \end{aligned}$$

é um isomorfismo pelo qua a sua restrição ao subespaço vectorial Y também é um isomorfismo sobre a imagem, $\varphi(Y)$. Falta então só encontrar $\varphi(Y)$. Seja $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$. Uma vez que $p(0) = a_0$ e $p(1) = a_0 + a_1 + a_2$ obtemos que

$$\begin{aligned} V = \varphi(Y) &= \big\{(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 2(a_0 + a_1 + a_2) - a_0 = 0\big\} = \\ &= \big\{(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3 \ : \ a_0 + 2a_1 + 2a_2 = 0\big\} \subset \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$