Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Álgebra Linear para LEIC - A

Teste 3 - 7 de Janeiro de 2012
Versão **A**
Duração: 90 minutos

Resolução
(com explicações detalhadas e resoluções alternativas)

(0.5 val.) 1. Diga, justificando, se a seguinte transformação, $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$T(x,y) = (x-y, x^2),$$

é linear.

Resolução Temos que

$$T(\lambda(x,y)) = T(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x - \lambda y, \lambda^2 x^2) = \lambda(x-y, \lambda x^2)$$

mas

$$\lambda T(x,y) = \lambda(x-y, x^2)$$

Escolhendo $\lambda \neq 0$ e $x \neq 0$ obtem-se

$$T(\lambda(x,y)) \neq \lambda T(x,y),$$

pelo que T não é uma transformação linear.

(0.5 val.) 2. Encontre uma base para o núcleo da transformação linear,

$$\begin{array}{rcl} T & : & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ T(x,y,z) & = & (x+2y+3z, x+2y+3z, x+2y+3z) \end{array}$$

Resolução Sabemos que

$$Nuc(T) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ T(x,y,z) = 0\right\} = \text{Conjunto Solução do sistema:}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+2y+3z & = & 0 \\ x+2y+3z & = & 0 \\ x+2y+3z & = & 0. \end{array} \right. \tag{1}$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss (ou fazendo uma justificação simples atendendo ao facto das 3 equações serem todas iguais) à matriz do sistema

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1 \\ \longrightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B,$$

concluimos que o sistema (1) é equivalente à seguinte equação com 3 incógnitas

$$x + 2y + 3z = 0.$$

As incógnitas livres são y, z. Uma base de $Nuc(T)$ pode ser encontrada escolhendo

$$\begin{aligned} y = 1, z = 0 &\Rightarrow v_1 = (-2, 1, 0) \\ y = 0, z = 1 &\Rightarrow v_2 = (-3, 0, 1), \\ \text{Base de } Nuc(T) &= (v_1, v_2) = ((-2, 1, 0), (-3, 0, 1)). \end{aligned}$$

3. Considere a transformação linear

$$\begin{aligned} T &: \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \\ T(p)(x) &= 2p'(x) + 3p(x). \end{aligned}$$

(1 val.) (a) Encontre a matriz de T na base canónica.

Resolução Para encontrar a matriz A de T na base canónica temos de aplicar T aos vectores da base canónica $(1, x, x^2)$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e decompor o resultado novamente na base canónica. Temos

$$\begin{aligned} T(1) &= 3 = 3 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ T(x) &= 2 + 3x = 2 \cdot 1 + 3 \cdot x \\ T(x^2) &= 4x + 3x^2 = 4 \cdot x + 3 \cdot x^2, \end{aligned}$$

pelo que

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(0.5 val.) (b) Encontre a matriz de T^2 na base canónica.

Resolução Temos $T^2 = T \circ T$, pelo que a matriz de T^2 na base canónica é $B = A^2$,

$$B = A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 8 \\ 0 & 9 & 24 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

4. Considere a matriz

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(0.5 val.) (a) Diga, sem fazer cálculos, por que razão 0 é um valor próprio de C.

Resolução A matriz C tem duas linhas iguais pelo que é singular,

$$P(0) = \det(C) = \det(C - 0 \cdot I) = 0$$

e portanto 0 é um valor próprio de C (é uma raiz do polinómio característico).

(0.5 val.) (b) Calcule os valores próprios de C e as suas multiplicidades algébricas e geométricas.

Resolução I O polinómio característico (que já sabemos ter $\lambda = 0$ como raíz) é

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(C - \lambda I) = (2-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) + 2(-(1-\lambda)2) = \\ &= (1-\lambda)[(2-\lambda)^2 - 4] = (1-\lambda)[\lambda^2 - 4\lambda] = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-4). \end{aligned}$$

Logo, os valores próprios são $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$, todos com multiplicidade algébrica 1, $ma(\lambda_i) = 1$. Uma vez que $1 \leq mg(\lambda) \leq ma(\lambda)$, concluimos que também $mg(\lambda_i) = 1,\ i = 1, 2, 3$.

Resolução II Da alínea anterior sabemos que $\lambda_1 = 0$ é um valor próprio de C. Da forma da matriz C (a sua segunda coluna tem a segunda entrada igual a 1 e as restantes iguais a zero, i.e. é igual a $1 \cdot e_2$) vemos também que o vector $e_2 = (0, 1, 0)$ é vector próprio de C com valor próprio $\lambda_2 = 1$. Usando agora a relação

$$\operatorname{tr}(C) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \Leftrightarrow 5 = 0 + 1 + \lambda_3,$$

Concluímos que $\lambda_3 = 4$, pelo que C tem 3 valores próprios diferentes. Como $C \in \mathrm{Mat}_{3\times3}(\mathbb{R})$ isso significa que as multiplicidades algébricas são todas iguais a 1 e portanto também as multiplicidades geométricas são todas iguais a 1.

(0.5 val.) (c) Encontre uma matriz não singular S tal que $S^{-1}CS$ é diagonal.

Resolução Os espaços próprios são

i. $E_0 = Nuc(A - 0 \cdot I) = Nuc(A)$. Usando o MEG:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Obtemos o sistema

$$\begin{cases} 2x + 2z &= 0 \\ y &= 0 \end{cases},$$

com conjunto solução,

$$\{(-z, 0, z),\ z \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}(\{(-1, 0, 1)\}) = E_0.$$

Um vector próprio com valor próprio $\lambda = 0$ é assim, $v_1 = (-1, 0, 1)$.

ii. $E_1 = Nuc(A - 1 \cdot I)$.
nota: neste caso como sabemos que e_2 é vector próprio de C com valor próprio 1 e como $mg(1) = 1$, podiamos escrever directamente a resposta, $E_1 = \mathcal{L}(\{e_2\})$).
Alternativamente, usando o MEG:

$$A - I \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow$$
$$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que $Nuc(A - 1I)$ é o conjunto solução do sistema

$$\begin{cases} x + 2z &= 0 \\ -3z &= 0 \end{cases},$$

com conjunto solução,

$$\{(0, y, 0),\ y \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}(\{(0, 1, 0)\}) = E_1.$$

Um vector próprio com valor próprio $\lambda = 1$ é assim, $v_2 = (0, 1, 0)$.

iii. $E_4 = Nuc(A - 4 \cdot I)$. Usando o MEG:

$$A - 4I \quad = \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 + L_1} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que $Nuc(A - 4I)$ é o conjunto solução do sistema

$$\begin{cases} -x + z &= 0 \\ -3y &= 0 \end{cases},$$

com conjunto solução,

$$\{(z, 0, z),\ z \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}(\{(1, 0, 1)\}) = E_4.$$

Um vector próprio com valor próprio $\lambda = 4$ é assim, $v_3 = (1, 0, 1)$. Vectores próprios de uma matriz associados a valores próprios diferentes são linearmente independentes, pelo que uma base de $\mathbb{R}^3$ de vectores próprios de C é $((-1, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 1))$. Uma matriz não singular S tal que $S^{-1}CS$ é diagonal é dada pela matriz tendo como colunas os vectores próprios de C,

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Seja $R : V \to V$ uma transformação linear.

(1 val.) (a) Mostre que qualquer conjunto de vectores próprios de R com valores próprios diferentes é linearmente independente.

Resolução Basta mostrar que qualquer conjunto finito de vectores próprios de R com valores próprios diferentes é linearmente independente. Fazemos a demonstração por indução (no número de vectores). Um conjunto com um vector próprio, $S_1 = \{v_1\}$, é linearmente independente, pela definição de vector próprio (não pode ser igual ao vector 0). Suponhamos (hipótese da indução) agora que todos os conjuntos com m vectores próprios de R com valores próprios diferentes é linearmente independente e mostremos que isso implica que qualquer conjunto de $m+1$ vectores próprios de R com valores próprios diferentes é linearmente independente. Seja $S_{m+1} = \{v_1, \ldots, v_{m+1}\}$ um tal conjunto arbitrário mas fixo. Então (pela hipótese da indução) $S_m = \{v_1, \ldots, v_m\}$ é linearmente independente. Consideremos a igualdade

$$a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m + a_{m+1} v_{m+1} = 0 \tag{3}$$

Aplicando R a ambos os membros de (3) obtemos

$$\begin{aligned} & R(a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m + a_{m+1} v_{m+1}) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda_1 a_1 v_1 + \cdots + \lambda_m a_m v_m + \lambda_{m+1} a_{m+1} v_{m+1} = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Multiplicando agora ambos os membros de (3) por λ_{m+1} obtemos

$$\lambda_{m+1} a_1 v_1 + \cdots + \lambda_{m+1} a_m v_m + \lambda_{m+1} a_{m+1} v_{m+1} = 0 \tag{5}$$

Subtraindo (5) a (4) obtemos

$$(\lambda_1 - \lambda_{m+1}) a_1 v_1 + \cdots + (\lambda_m - \lambda_{m+1}) a_m v_m = 0,$$

o que, atendendo à independencia linear de S_m, implica

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 - \lambda_{m+1}) a_1 = 0, \ldots, (\lambda_m - \lambda_{m+1}) a_m = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad & a_1 = 0, \ldots, a_m = 0. \end{aligned}$$

Substituindo em (3) obtemos

$$a_{m+1} v_{m+1} = 0 \ \Rightarrow \ a_{m+1} = 0$$

pelo que está demonstrada a independência linear de S_{m+1}.

(0.5 val.) (b) Use $R(f) = d^2 f/dx^2$ e o resultado mostrado na alínea anterior para concluir que o conjunto $\{sen(nx), n \in \mathbb{N}\}$ em $C^\infty(\mathbb{R})$ é linearmente independente.

Resolução Aplicando R às funções $g_n(x) = sen(nx)$ obtemos

$$R(g_n)(x) = (sen(nx))'' = -n^2 sen(nx).$$

Vemos as funções g_n são funções próprias de R com valores próprios $\lambda_n = -n^2$, todos diferentes para $n \in \mathbb{N}$, pelo que o conjunto $\{sen(nx), n \in \mathbb{N}\}$ é linearmente independente.

(1 val.) 6. (a) Encontre uma base de $\mathbb{R}^3$ de vectores próprios generalizados da matriz

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Resolução Temos $det(B - \lambda I) = (2 - \lambda)^3$ pelo que 2 é valor próprio com $ma(2) = 3$. Para encontrarmos a multiplicidade geométrica apliquemos o MEG à matriz $B - 2I$

$$B - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_1} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Concluímos que $car(B - 2I) = 2$ pelo que $dim(Nuc(B - 2I)) = mg(2) = 3 - 2 = 1$ e portanto só vai haver um bloco de Jordan na forma canónica de Jordan (FCJ). Da forma de B ou a partir da matriz em escada de linhas obtida acima concluímos que $Nuc(B - 2I) = \mathcal{L}(\{e_3 = (0, 0, 1)\})$. Podemos encontrar a base de vectores próprios generalizados de duas formas alternativas:

Forma 1. Começamos por encontrar um vector próprio generalizado (que sabemos existir por a FCJ de B ter só um bloco de Jordan 3×3) que é solução do sistema

$$\begin{cases} (B - 2I)^3 v_3 &= 0 \\ (B - 2I)^2 v_3 &\neq 0 \end{cases}. \tag{6}$$

Como

$$(B - 2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$(B - 2I)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

concluímos que o sistema (6) para $v_3 = (x_3, y_3, z_3)$ toma a forma

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 \end{pmatrix} v_3 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9x_1 \end{pmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow x_1 \neq 0. \end{cases} \tag{7}$$

Portanto qualquer vector v_3 com $x_1 \neq 0$ é solução de (6). Escolhemos $v_3 = e_1 = (1,0,0)$. A partir deste vector obtemos mais um vector próprio generalizado:

$$v_2 = (B-2I)v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e ainda o vector próprio que termina a cadeia de vectores próprios generalizados iniciada em v_3,

$$v_1 = (B-2I)v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} = 9e_3.$$

Uma base de $\mathbb{R}^3$ de vectores próprios generalizados de B é então $(v_1, v_2, v_3) = ((0,0,9),(0,3,0),(0,0,1))$.

Forma 2. A outra forma de encontrar a cadeia de vectores próprios generalizados associada ao valor próprio 2, consiste em começar no vector próprio, $v_1 = (0,0,1)$ e encontrar depois v_2 como uma solução do sistema não homogéneo

$$(B-2I)v_2 = v_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Uma solução é (fazer as contas!) $v_2 = (0, \frac{1}{3}, 0)$. O último vector da cadeia encontra-se como solução de

$$(B-2I)v_3 = v_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Uma solução é (fazer as contas!) $v_3 = (\frac{1}{9}, 0, 0)$. Uma base de $\mathbb{R}^3$ de vectores próprios generalizados de B é então $(v_1, v_2, v_3) = ((0,0,1),(0,\frac{1}{3},0),(0,0,\frac{1}{9}))$.

(0.5 val.) (b) Qual a forma canónica de Jordan C da matriz B e qual a matriz não singular U tal que $C = U^{-1}BU$?

Resolução Atendendo aos resultados da alínea anterior sabemos que a FCJ de B é

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Uma matriz não singular U tal que $C = U^{-1}BU$ é uma matriz tendo como colunas uma base de vectores próprios generalizados obtidos como descrito na alínea anterior. Usando a **forma 1** da alínea anterior temos

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 9 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Usando a **forma 2** obtemos o resultado anterior multiplicado por 1/9 (ambos estão correctos!),

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{9} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(0.5 val.) (a) Encontre uma base de $Lin(A) \subset \mathbb{R}^4$.

Resolução Uma vez que a matriz A já está em forma de escadas de linhas uma base de $Lin(A)$ é dada pelas linhas não nulas de A,

$$(v_1, v_2, v_3) = ((1,1,1,1), (0,1,1,1), (0,0,1,-1)).$$

(1 val.) (b) Construa uma base ortonormada de $Lin(A)$.

Resolução Pelo método de Gram–Schmidt obtemos uma base ortogonal

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 = (1,1,1,1) \\ u_2 &= v_2 - \frac{< v_2, u_1 >}{||u_1||^2} u_1. \end{aligned}$$

Uma vez que, $< v_2, u_1 >= 3, ||u_1||^2 =< u_1, u_1 >= 4$, obtemos

$$u_2 = (0,1,1,1) - \frac{3}{4}(1,1,1,1) = \frac{1}{4}(-3,1,1,1).$$

[observemos que usando $\tilde{u}_2 = 4u_2 = (-3,1,1,1)$ levaria à mesma base ortonormada]. Para u_3 temos

$$\begin{aligned} u_3 &= v_3 - \frac{< v_3, u_1 >}{||u_1||^2} u_1 - \frac{< v_3, u_2 >}{||u_2||^2} u_2 \\ < v_3, u_1 > &= < (0,0,1,-1), (1,1,1,1) >= 0, \ < v_3, u_2 >= 0 \ \Rightarrow \\ \Rightarrow u_3 &= v_3 = (0,0,1,-1). \end{aligned}$$

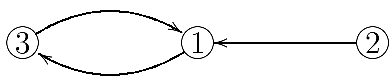
A base

$$(u_1, u_2, u_3) = ((1,1,1,1), \frac{1}{4}(-3,1,1,1), (0,0,1,-1))$$

é uma base ortogonal de $Lin(A)$. Uma base ortonormada é então

$$\begin{aligned} (\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3) &= (\frac{u_1}{||u_1||}, \frac{u_2}{||u_2||}, \frac{u_3}{||u_3||}) = \\ &= \left(\frac{1}{2}(1,1,1,1), \frac{1}{2\sqrt{3}}(-3,1,1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,-1) \right). \end{aligned}$$

8. Considere a mini-rede (mini-Web) com 3 páginas e as ligações indicadas.



(1 val.) (a) Sabendo que a matriz google G para esta rede é $G = \delta A + (1-\delta)F$, onde A é a matriz das ligações, $\delta = 0.7$ e F é

$$F = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

calcule o (vector de) page rank desta rede [com entradas inteiras positivas].

Resolução A relação entre as importâncias das páginas, tendo em conta só os links, é dada pelo sistema

$$\begin{cases} x_1 & = & x_2 + x_3 \\ x_3 & = & x_1 \end{cases} \Leftrightarrow Ax = x,$$

onde A é a matriz dos links

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como não há nós pendurados a matriz de Google para esta minirede é a seguinte matriz

$$G = \delta A + (1-\delta)F = 0.7A + 0.3F = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.8 & 0.8 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.8 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

O vector de PageRank, $x = (x_1, x_2, x_3)$, é um vector próprio de G com valor próprio 1 (que sabemos ter $mg(1) = 1$, uma vez que G tem transposta estocástica e é positiva), ou seja $x \in Nuc(G-I)$. Aplicando o MEG

$$\begin{pmatrix} -0.9 & 0.8 & 0.8 \\ 0.1 & -0.9 & 0.1 \\ 0.8 & 0.1 & -0.9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -9 & 8 & 8 \\ 1 & -9 & 1 \\ 8 & 1 & -9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -9 & 1 \\ -9 & 8 & 8 \\ 8 & 1 & -9 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -9 & 1 \\ 0 & -73 & 17 \\ 0 & 73 & -17 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -9 & 1 \\ 0 & -73 & 17 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

O sistema para encontrar $Nuc(G-I)$ é então

$$\begin{cases} x_1 - 9x_2 + x_3 & = & 0 \\ -73x_2 + 17x_3 & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & = & 9 \cdot \frac{17}{73} - 1 = \frac{80}{73} \\ x_2 & = & \frac{17}{73}x_3 \end{cases}$$

pelo que o vector de PageRank é (escolhemos a incógnita livre $x_3 = 73$)

$$x = (80, 17, 73).$$

(0.5 val.) (b) Supondo que $P_1 = \{\text{banana, maçã, laranja}\}$, $P_2 = \{\text{banana}\}$, $P_3 = \{\text{maçã, laranja}\}$, diga qual a sucessão de páginas que resulta da busca: *banana*.
[**Nota:** se não tiver resolvido a alínea anterior (e só nesse caso) assuma que o vector de page rank é $x = (4, 5, 1)$.]

Resolução Só aparecem as páginas que tenham *banana*, ordenadas de acordo com o vector de PageRank, pelo que a sucessão é $P_1 \to P_2$.