

Cálculo de Parâmetros Integrais de Camada Limite em Gradiente de Pressão Nulo

L.Eça
Março 2008

1. Introdução

Nesta nota consideramos o escoamento bidimensional e incompressível sobre uma placa plana tal como ilustrado na figura 1. O escoamento exterior tem a componente da velocidade paralela à placa constante, U_e , que corresponde a um gradiente de pressão nulo imposto à camada limite que se desenvolve na superfície da placa.

$$\frac{dp}{dx} = 0 \quad (1)$$

A camada limite tem três regiões distintas:

1. Região laminar para $x < x_{cr}$ ou $Re_x < Re_{cr}$.
2. Região de transição para $x_{cr} \leq x < x_{tr}$ ou $Re_{cr} \leq Re_x < Re_{tr}$.
3. Região turbulenta para $x \geq x_{tr}$ ou $Re_x \geq Re_{tr}$.

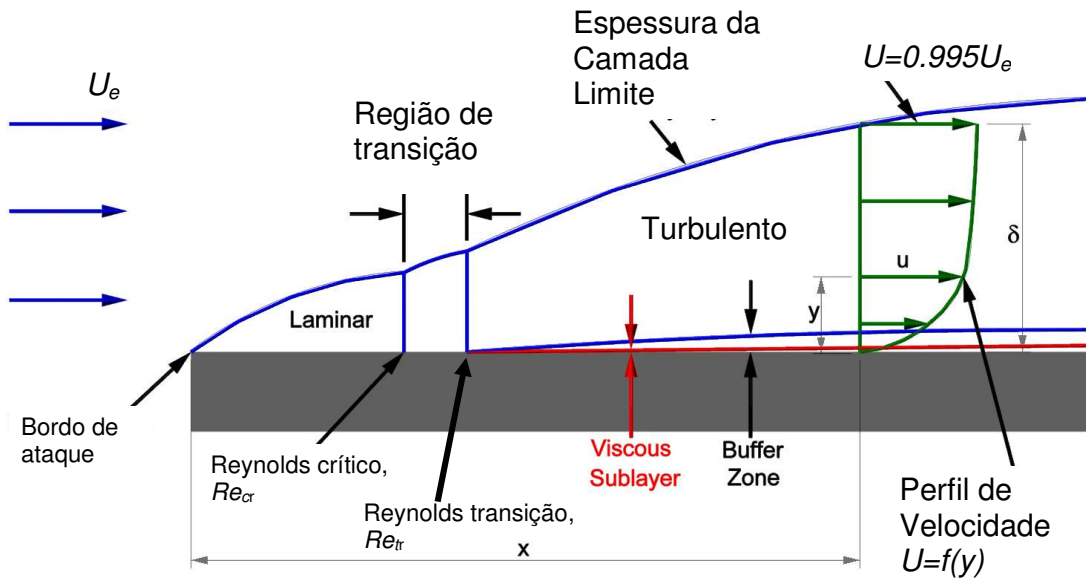


Figura 1 – Ilustração do escoamento sobre uma placa plana.

Na região laminar o escoamento é permanente (estacionário) e existe uma solução analítica para as equações de camada limite em gradiente de pressão nulo: a solução de Blasius. Rigorosamente, esta solução só é válida para $Re_x \gg 1$, pelo que a solução de Blasius não é válida na vizinhança do bordo de ataque.

Para $x=x_{cr}$, aparece a primeira frequência de perturbação para a qual o perfil de camada limite laminar se torna instável (as perturbações tendem a ser ampliadas). A gama de frequências instáveis alarga-se com o aumento do número de Reynolds e para $x \geq x_{tr}$ o escoamento passa a exibir as características de um escoamento turbulento. Ou seja, o escoamento torna-se não permanente (não estacionário) com variações instantâneas das componentes de velocidade numa gama bastante grande de frequências. No entanto, no caso do escoamento sobre uma placa plana, estas flutuações de velocidade ocorrem em torno de um valor médio que não varia com o tempo. Temos assim um escoamento estatisticamente permanente (estacionário). A região entre x_{cr} e x_{tr} é designada por transição de camada limite de regime laminar a turbulento, ou simplesmente região de transição.

Nas secção seguinte apresenta-se uma forma de calcular os parâmetros integrais de camada limite, δ^* , θ e H ao longo da camada limite. Inclui-se também a espessura da camada limite, δ , e o coeficiente de tensão de corte superficial, C_f . A determinação do coeficiente de resistência para uma placa de comprimento L é apresentada na secção 3. A representação gráfica das soluções é apresentada na secção 4.

2. Determinação dos Parâmetros Integrais da Camada Limite em Gradiente de Pressão Nulo

2.1 Escoamento Laminar

Em escoamento laminar os parâmetros integrais, δ^* , θ e H , e o coeficiente de tensão de corte superficial, C_f , são determinados pela solução analítica de Blasius:

$$\begin{aligned} \frac{\delta^*}{x} &= 1,72 \text{Re}_x^{-0,5} & \delta^* &= 1,72 \left(\frac{\nu}{U_e} \right)^{0,5} x^{0,5} \\ \frac{\theta}{x} &= 0,664 \text{Re}_x^{-0,5} & \theta &= 0,664 \left(\frac{\nu}{U_e} \right)^{0,5} x^{0,5} \\ H &= \frac{\delta^*}{\theta} = 2,59 \end{aligned} \quad (2)$$

O coeficiente de tensão de corte superficial, C_f , pode ser obtido directamente do perfil adimensional de velocidade ou simplesmente da equação integral de von Kármán para gradiente de pressão nulo:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{C_f}{2} = \frac{\tau_w}{\rho U_e^2} \quad (3)$$

A partir da equação de θ obtém-se:

$$C_f = 0,664 \text{Re}_x^{-0,5} \quad (4)$$

Na solução analítica de Blasius, a velocidade U tende assintoticamente para U_e . A definição de δ nestas condições não é unívoca. Admitindo que δ corresponde à distância à placa para a qual $U=0.995U_e$, obtém-se:

$$\frac{\delta}{x} = 5 \text{Re}_x^{-0,5} \quad \delta = 5 \left(\frac{\nu}{U_e} \right)^{0,5} x^{0,5} \quad (5)$$

2.2 Região de Transição

Na região de transição não existem soluções para as equações de camada limite em escoamento bi-dimensional e incompressível. Experimentalmente, verificam-se as seguintes variações na região de transição:

$$\begin{aligned} (\delta)_{x=x_{tr}} &> (\delta)_{x=x_{cr}} \\ (\theta)_{x=x_{tr}} &> (\theta)_{x=x_{cr}} \quad (\theta)_{x=x_{tr}} = (\theta)_{x=x_{cr}} + \int_{x_{cr}}^{x_{tr}} \frac{\tau_w}{\rho U_e^2} dx \\ (H)_{x=x_{tr}} &< (H)_{x=x_{cr}} \\ (C_f)_{x=x_{tr}} &> (C_f)_{x=x_{cr}} \end{aligned} \quad (6)$$

A hipótese simplificativa mais habitual (chamada aproximação de engenharia) é considerar $x_{cr} \approx x_{tr}$ ($\text{Re}_{cr} \approx \text{Re}_{tr}$). A consequência imediata desta aproximação é que a espessura de quantidade de movimento, θ , tem de ser contínua no “ponto” de transição. Os restantes parâmetros são descontínuos no “ponto” de transição. Os valores em $x=x_{cr}$ são determinados pela evolução em regime laminar (equações (2), (4) e (5)). Designando o “ponto” de transição (coincidente com o início da região de escoamento turbulento) por x_{tr} , as consequências destas aproximações são as seguintes:

$$\begin{aligned} \theta_o &= (\theta)_{x=x_{tr}} = (\theta)_{x=x_{cr}} \\ \delta_o &= (\delta)_{x=x_{tr}} > (\delta)_{x=x_{cr}} \\ H_o &= (H)_{x=x_{tr}} < (H)_{x=x_{cr}} \\ \delta_o^* &= (\delta^*)_{x=x_{tr}} < (\delta^*)_{x=x_{cr}} \\ (C_f)_{x=x_{tr}} &> (C_f)_{x=x_{cr}} \end{aligned} \quad (7)$$

2.3 Escoamento Turbulento

Em escoamento turbulento não há soluções analíticas para as equações de camada limite. Uma alternativa para a determinação dos parâmetros de camada limite em regime turbulento é a solução aproximada da equação integral de von Kármán (equação (3)). Mesmo em gradiente de pressão nulo, a equação de von Kármán tem mais incógnitas (θ e C_f) do que equações. Desta forma, é necessário relacionar as incógnitas através da especificação do perfil adimensional de velocidade $U/U_e=f(y/\delta)$.

Uma escolha habitual em escoamento turbulento é a utilização de um perfil tipo potência:

$$\frac{U}{U_e} = \begin{cases} \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/n} & \Leftarrow y \leq \delta \\ 1 & \Leftarrow y > \delta \end{cases} \quad (8)$$

Para este perfil de velocidade as razões entre δ^* e δ , θ e δ e o factor de forma, H , são dados por:

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \frac{1}{n+1}, \quad \frac{\theta}{\delta} = \frac{n}{(n+1)(n+2)}, \quad H = 1 + \frac{2}{n} \quad (9)$$

O valor típico de n para uma camada limite em gradiente de pressão nulo é $n=7$, pelo que se tem:

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \frac{1}{8}, \quad \frac{\theta}{\delta} = \frac{7}{72}, \quad H = \frac{9}{7} = 1,286 \quad (10)$$

O perfil tipo potência descrito pela equação (8) não é suficiente para resolver a equação integral de von Kármán. O coeficiente de tensão de corte superficial, C_f , não se pode calcular a partir deste tipo de perfil, porque a derivada $\partial U/\partial y$ é infinita na parede ($y=0$). Desta forma, é necessário utilizar uma correlação empírica que relacione C_f com um (ou mais) dos restantes parâmetros da camada limite.

Uma hipótese para a obtenção desta correlação é a utilização das relações disponíveis para o factor de atrito, f , no escoamento completamente desenvolvido em tubos ($U_{med} \cong 0,81U_{max}$). Fazendo a analogia:

$$\delta \cong \frac{D}{2}, \quad U_e \cong U_{max} \quad (11)$$

e utilizando a seguinte expressão válida para tubos lisos

$$f = 0,3164 \left(\frac{U_{med} D}{\nu} \right)^{-1/4} \quad (12)$$

pode-se obter a seguinte relação:

$$\frac{C_f}{2} = \frac{\tau_w}{\rho U_e^2} = 0,0227 \left(\frac{U_e \delta}{\nu} \right)^{-1/4} \quad (13)$$

Note-se que se podem obter as equações (8) (com $n=7$) e (13) a partir do perfil de velocidade

$$\frac{U}{u_\tau} = 8,7 \left(\frac{u_\tau y}{\nu} \right)^{1/7} \quad (14)$$

em que u_τ é a velocidade de atrito (fricção) dada por

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = U_e \sqrt{\frac{C_f}{2}} \quad (15)$$

A equação 14 pode ser rescrita como

$$\frac{U}{U_e} = \left[8,7 \left(\frac{u_\tau}{U_e} \right) \left(\frac{u_\tau \delta}{\nu} \right)^{1/7} \right] \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7} \quad (16)$$

Como para $y=\delta$ temos $U \approx U_e$, conclui-se a partir da equação (16) que

$$8,7 \left(\frac{u_\tau}{U_e} \right) \left(\frac{u_\tau \delta}{\nu} \right)^{1/7} = 1 \quad (17)$$

e

$$\frac{U}{U_e} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7} \quad (18)$$

Para obter a equação (13) a partir da (17), basta substituir u_τ por C_f .

As equações apresentadas acima para o perfil de velocidade (8) e coeficiente de tensão de corte superficial, C_f (13), correspondem às utilizadas nas referências [1] e [2].

Na referência [3] o perfil de velocidade adoptado é idêntico ao apresentado em cima (equação (8)), mas a correlação que determina C_f é dada por

$$C_f = 0,02 \left(\frac{U_e \delta}{\nu} \right)^{-1/6} \quad (19)$$

Como o expoente desta aproximação não é idêntico ao da equação (13), os resultados obtidos em [3] não são idênticos aos que se apresentam nas secções seguintes. Isto não quer dizer que estejam errados, porque em qualquer dos casos temos soluções aproximadas baseadas em correlações e perfis empíricos.

Utilizando as equações (10) e (13), a equação integral de von Kármán, equação (3), pode ser escrita com δ , δ^* ou θ como variáveis dependentes.

$$\delta^{1/4} \frac{d\delta}{dx} = \left(\frac{72}{7}\right) 0,0227 \left(\frac{\nu}{U_e}\right)^{1/4} \quad (20)$$

$$\theta^{1/4} \frac{d\theta}{dx} = \left(\frac{7}{72}\right)^{1/4} 0,0227 \left(\frac{\nu}{U_e}\right)^{1/4} \quad (21)$$

$$(\delta^*)^{1/4} \frac{d\delta^*}{dx} = \left(\frac{72}{7}\right) \left(\frac{1}{8}\right)^{5/4} 0,0227 \left(\frac{\nu}{U_e}\right)^{1/4} \quad (22)$$

Como já referimos em cima, C_f pode ser calculado directamente da equação de von Kármán derivando θ em ordem a x .

2.3.1. Escoamento turbulento desde o bordo de ataque

A alternativa mais simples para obter as evoluções dos parâmetros de camada limite em regime turbulento é admitir que a camada limite é turbulenta desde o bordo de ataque da placa ($x=0$). Nessas condições temos

$$\int_0^\delta \delta^{1/4} d\delta = \int_0^x \left(\frac{72}{7}\right) 0,0227 \left(\frac{\nu}{U_e}\right)^{1/4} dx \quad (23)$$

$$\int_0^\theta \theta^{1/4} d\theta = \int_0^x \left(\frac{7}{72}\right)^{1/4} 0,0227 \left(\frac{\nu}{U_e}\right)^{1/4} dx \quad (24)$$

$$\int_0^{\delta^*} (\delta^*)^{1/4} d\delta^* = \int_0^x \left(\frac{72}{7}\right) \left(\frac{1}{8}\right)^{5/4} 0,0227 \left(\frac{\nu}{U_e}\right)^{1/4} dx \quad (25)$$

Estas equações são facilmente integráveis e os resultados são:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{x} &= 0,373 \text{Re}_x^{-0,2} & \delta &= 0,373 \left(\frac{\nu}{U_e}\right)^{0,2} x^{0,8} \\ \frac{\theta}{x} &= 0,0363 \text{Re}_x^{-0,2} & \theta &= 0,0363 \left(\frac{\nu}{U_e}\right)^{0,2} x^{0,8} \\ \frac{\delta^*}{x} &= 0,0466 \text{Re}_x^{-0,2} & \delta^* &= 0,0466 \left(\frac{\nu}{U_e}\right)^{0,2} x^{0,8} \\ C_f &= 2 \frac{d\theta}{dx} = 0,0581 \text{Re}_x^{-0,2} \end{aligned} \quad (26)$$

2.3.2 Equações incluindo o efeito da transição

As equações (23), (24) e (25) podem também ser integradas tendo em conta que a camada limite é laminar para $x < x_{tr}$. Nesse caso obtemos:

$$\int_{\delta_o}^{\delta} \delta^{1/4} d\delta = \int_{x_{tr}}^x \left(\frac{72}{7}\right) 0,0227 \left(\frac{\nu}{U_e}\right)^{1/4} dx \quad (27)$$

$$\int_{\theta_o}^{\theta} \theta^{1/4} d\theta = \int_{x_{tr}}^x \left(\frac{7}{72}\right)^{1/4} 0,0227 \left(\frac{\nu}{U_e}\right)^{1/4} dx \quad (28)$$

$$\int_{\delta_o^*}^{\delta^*} (\delta^*)^{1/4} d\delta^* = \int_{x_{tr}}^x \left(\frac{72}{7}\right) \left(\frac{1}{8}\right)^{5/4} 0,0227 \left(\frac{\nu}{U_e}\right)^{1/4} dx \quad (29)$$

A integração também é simples, mas é necessário determinar os parâmetros de camada limite no início da região turbulenta. De acordo com as aproximações assumidas, os valores iniciais da região turbulenta são dados por:

$$\begin{aligned} \theta_o &= 0,664 \text{Re}_{tr}^{-0,5} x_{tr} = 0,664 \left(\frac{\nu}{U_e}\right)^{0,5} x_{tr}^{0,5} \\ \delta_o &= \frac{72}{7} \theta_o = \frac{72}{7} 0,664 \text{Re}_{tr}^{-0,5} x_{tr} = \frac{72}{7} 0,664 \left(\frac{\nu}{U_e}\right)^{0,5} x_{tr}^{0,5} \\ \delta_o^* &= \frac{9}{7} \theta_o = \frac{9}{7} 0,664 \text{Re}_{tr}^{-0,5} x_{tr} = \frac{9}{7} 0,664 \left(\frac{\nu}{U_e}\right)^{0,5} x_{tr}^{0,5} \end{aligned} \quad (30)$$

Com estas aproximações os resultados são

$$\begin{aligned} \delta &= \left[\delta_o^{5/4} + 0,292(x - x_{tr}) \left(\frac{\nu}{U_e}\right)^{1/4} \right]^{4/5} \\ \theta &= \left[\theta_o^{5/4} + 0,0158(x - x_{tr}) \left(\frac{\nu}{U_e}\right)^{1/4} \right]^{4/5} \\ \delta^* &= \left[(\delta_o^*)^{5/4} + 0,0217(x - x_{tr}) \left(\frac{\nu}{U_e}\right)^{1/4} \right]^{4/5} \\ C_f &= 0,0253 \left(\frac{\nu}{U_e}\right)^{1/4} \left[\theta_o^{5/4} + 0,0158(x - x_{tr}) \left(\frac{\nu}{U_e}\right)^{1/4} \right]^{-1/5} \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{x} &= \left[11,04 \left(\frac{U_e x}{\nu} \right)^{-5/8} \left(\frac{x_{tr}}{x} \right)^{5/8} + 0,292 \left(1 - \frac{x_{tr}}{x} \right) \left(\frac{U_e x}{\nu} \right)^{-1/4} \right]^{4/5} \\
\frac{\theta}{x} &= \left[0,599 \left(\frac{U_e x}{\nu} \right)^{-5/8} \left(\frac{x_{tr}}{x} \right)^{5/8} + 0,0158 \left(1 - \frac{x_{tr}}{x} \right) \left(\frac{U_e x}{\nu} \right)^{-1/4} \right]^{4/5} \\
\frac{\delta^*}{x} &= \left[0,821 \left(\frac{U_e x}{\nu} \right)^{-5/8} \left(\frac{x_{tr}}{x} \right)^{5/8} + 0,0217 \left(1 - \frac{x_{tr}}{x} \right) \left(\frac{U_e x}{\nu} \right)^{-1/4} \right]^{4/5} \\
C_f &= 0,0253 \left[\left(\frac{\theta_o U_e}{\nu} \right)^{5/4} + 0,0158 \left(1 - \frac{x_{tr}}{x} \right) \left(\frac{U_e x}{\nu} \right) \right]^{-1/5}
\end{aligned} \tag{32}$$

É fácil verificar que as equações (31) e (32) são idênticas às equações (26) quando $x_{tr}/x \rightarrow 0$. As equações (31) e (32) podem ser escritas numa forma semelhante às equações (26) corrigindo a coordenada x . Uma vez que se “conhecem” os valores de δ_o , δ_o^* e θ_o , podemos determinar a coordenada x_v a que começaria uma camada limite turbulenta que repete as condições iniciais assumidas para a região turbulenta (denominada habitualmente por origem virtual da camada limite turbulenta).

$$x_v = x_{tr} \left(1 - 37,83 \text{Re}_{tr}^{-3/8} \right) \tag{33}$$

As equações (31) e (32) passam então a escrever-se

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{x} &= 0,373 \left(\text{Re}_x \left(1 - \frac{x_v}{x} \right) \right)^{-0,2} \left(1 - \frac{x_v}{x} \right) & \delta &= 0,373 \left(\frac{\nu}{U_e} \right)^{0,2} (x - x_v)^{0,8} \\
\frac{\theta}{x} &= 0,0363 \left(\text{Re}_x \left(1 - \frac{x_v}{x} \right) \right)^{-0,2} \left(1 - \frac{x_v}{x} \right) & \theta &= 0,0363 \left(\frac{\nu}{U_e} \right)^{0,2} (x - x_v)^{0,8} \\
\frac{\delta^*}{x} &= 0,0466 \left(\text{Re}_x \left(1 - \frac{x_v}{x} \right) \right)^{-0,2} \left(1 - \frac{x_v}{x} \right) & \delta^* &= 0,0466 \left(\frac{\nu}{U_e} \right)^{0,2} (x - x_v)^{0,8} \\
C_f &= 0,0581 \left(\text{Re}_x \left(1 - \frac{x_v}{x} \right) \right)^{-0,2}
\end{aligned} \tag{34}$$

As equações (34) são equivalentes às equações (31) e (32).

3. Coeficiente de Resistência de uma Placa de Dimensão L em Gradiente de Pressão Nulo

Um dos resultados mais importantes de um cálculo de uma camada limite sobre uma placa plana é a determinação do coeficiente de resistência da placa, C_D . Para uma placa de comprimento L , o coeficiente de resistência é definido por:

$$C_D = \frac{\int_0^L \tau_w dx}{1/2 \rho U_\infty^2 L} = \frac{1}{L} \int_0^L C_f dx \quad (35)$$

3.1 Escoamento Laminar

Se toda a placa se encontrar em regime laminar, $x_{tr} > L$, temos:

$$C_D = \frac{1}{L} \int_0^L 0,664 \left(\frac{U_e x}{\nu} \right)^{-0,5} dx = 1,328 \text{Re}_L^{-0,5} \quad (36)$$

3.2 Escoamento Turbulento

3.3.1 Escoamento turbulento desde o bordo de ataque

Admitindo que toda a placa se encontra em regime turbulento temos:

$$C_D = \frac{1}{L} \int_0^L 0,0581 \left(\frac{U_e x}{\nu} \right)^{-0,2} dx = 0,073 \text{Re}_L^{-0,2} \quad (37)$$

3.3.2 Equações incluindo o efeito da transição

Se quisermos tomar em consideração que a placa tem parte do escoamento em regime laminar e parte em regime turbulento, temos de determinar C_D a partir de

$$C_D = \frac{1}{L} \left[\int_0^{x_{tr}} C_f dx + \int_{x_{tr}}^L C_f dx \right] \quad (38)$$

em que o primeiro integral corresponde ao regime laminar e o segundo ao regime turbulento. Substituindo as equações (2) e (31) (ou (32)) em (38) obtém-se:

$$C_D = \left[\left(1,328 \text{Re}_{tr}^{-0,5} \frac{x_{tr}}{L} \right)^{1,25} + 0,0377 \text{Re}_L^{-1/4} \left(1 - \frac{x_{tr}}{L} \right) \right]^{4/5} \quad (39)$$

Alternativamente, se utilizarmos C_f da equação (34) obtemos

$$C_D = 1,328 \text{Re}_{tr}^{-0,5} \frac{x_{tr}}{L} + 0,073 \left(\text{Re}_L \left(1 - \frac{x_v}{x_{tr}} \right) \right)^{-0,2} \left(1 - \frac{x_v}{L} \right) - 0,073 \left(\text{Re}_{tr} \left(1 - \frac{x_v}{x_{tr}} \right) \right)^{-0,2} \left(\frac{x_o - x_v}{L} \right) \quad (40)$$

3.3.2.1 Equação baseada na solução válida desde o bordo de ataque

Utilizando a equação de C_f que é válida para camadas limites turbulentas desde o bordo de ataque, também é possível obter uma equação alternativa para determinar C_D incluindo o efeito da região laminar. O coeficiente de resistência pode ser obtido através de

$$C_D = \frac{1}{L} \left[\int_0^{x_{tr}} C_f dx + \int_0^L C_f dx - \int_0^{x_{tr}} C_f dx \right] \quad (41)$$

em que o primeiro integral corresponde a regime laminar e os dois últimos a regime turbulento. Utilizando as equações de C_f (2) e (26) e integrando obtém-se:

$$C_D = 0,073 \text{Re}_L^{-0,2} + \left(\frac{x_{tr}}{L} \right) \left(1,328 \text{Re}_{tr}^{-0,5} - 0,073 \text{Re}_{tr}^{-0,2} \right) \quad (42)$$

Esta aproximação tem uma forma bastante mais simples que as equações (39) ou (40). No entanto, o nível da tensão de corte admitido para o início da região turbulenta é menor para esta opção do que para a da secção anterior. Formalmente (do ponto de vista do modelo matemático adoptado), a equação correcta é a (39) (ou (40)). Contudo, como ilustraremos na secção seguinte, do ponto de vista físico a aproximação definida pela equação (42) pode ser mais realista na vizinhança do “ponto” de transição.

4. Representação Gráfica das Soluções

Nesta secção comparam-se as várias correlações apresentadas nas secções anteriores. Nos exemplos apresentados, a espessura da camada limite, espessura de deslocamento e espessura de quantidade de movimento são adimensionalizadas pelo comprimento da placa, L . Para facilitar a reprodução dos dados apresentam-se de seguida as equações ilustradas nesta secção.

4.1 Correlações representadas

4.1.1 Escoamento Laminar

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{L} &= 5 \text{Re}_x^{-0,5} \left(\frac{x}{L} \right) \\ \frac{\delta^*}{L} &= 1,72 \text{Re}_x^{-0,5} \left(\frac{x}{L} \right) \quad \text{para } x < x_o \wedge \text{Re}_x < \text{Re}_{tr} \\ \frac{\theta}{L} &= 0,664 \text{Re}_x^{-0,5} \left(\frac{x}{L} \right) \\ C_f &= 0,664 \text{Re}_x^{-0,5} \end{aligned} \quad (43)$$

4.1.2 Escoamento Turbulento

4.1.2.1 Escoamento turbulento desde o bordo de ataque

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{L} &= 0,373 \operatorname{Re}_x^{-0,2} \left(\frac{x}{L} \right) \\ \frac{\delta^*}{L} &= 0,0466 \operatorname{Re}_x^{-0,2} \left(\frac{x}{L} \right) \quad \text{para } x > 0 \\ \frac{\theta}{L} &= 0,0363 \operatorname{Re}_x^{-0,2} \left(\frac{x}{L} \right) \\ C_f &= 0,0581 \operatorname{Re}_x^{-0,2}\end{aligned}\tag{44}$$

4.1.2.2 Equações incluindo o efeito da transição

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{L} &= \left[\left(6,83 \operatorname{Re}_{tr}^{-0,5} \left(\frac{x_o}{L} \right) \right)^{5/4} + 0,292 \left(\frac{x-x_o}{L} \right) \operatorname{Re}_L^{-1/4} \right]^{4/5} \\ \frac{\delta^*}{L} &= \left[\left(0,854 \operatorname{Re}_{tr}^{-0,5} \left(\frac{x_o}{L} \right) \right)^{5/4} + 0,0217 \left(\frac{x-x_o}{L} \right) \operatorname{Re}_L^{-1/4} \right]^{4/5} \quad \text{para } \begin{matrix} x \geq x_o \\ \operatorname{Re}_x \geq \operatorname{Re}_{tr} \end{matrix} \\ \frac{\theta}{L} &= \left[\left(0,664 \operatorname{Re}_{tr}^{-0,5} \left(\frac{x_o}{L} \right) \right)^{5/4} + 0,0158 \left(\frac{x-x_o}{L} \right) \operatorname{Re}_L^{-1/4} \right]^{4/5} \\ C_f &= 0,0253 \left[0,6 \operatorname{Re}_{tr}^{5/8} + 0,0158 (\operatorname{Re}_x - \operatorname{Re}_{tr}) \right]^{-1/5}\end{aligned}\tag{45}$$

4.1.3 Coeficiente de resistência de uma placa de comprimento L

Para o coeficiente de resistência da placa as equações já foram apresentadas na secção anterior: equação (36) para escoamento laminar; equação (37) para camada limite turbulenta desde o bordo de ataque; equações (39) e (40) para integrações da região turbulenta entre o “ponto” de transição e L ; equação (42) para integrações da região turbulenta baseadas nas correlações para camadas limite turbulentas desde o bordo de ataque, mas incluindo o efeito da região laminar.

4.2 Exemplo de aplicação

Os resultados apresentados nas secções seguintes foram calculados com $\operatorname{Re}_L = 10^8$ e $\operatorname{Re}_{cr} = \operatorname{Re}_{tr} = 5 \times 10^5$.

4.3.1 Espessura da camada limite

A figura 2 apresenta δ/L em função do número de Reynolds, Re_x . No gráfico do lado esquerdo, pode-se observar a descontinuidade de δ no “ponto” de transição e uma diferença apreciável entre as curvas determinadas tendo em conta a região laminar e para uma camada limite turbulenta desde o bordo de ataque. No entanto, para aproximadamente $Re_x > 10^7$ ($x/L < 0,05$), a contabilização da região laminar é desprezável (gráfico à direita) podendo-se utilizar as expressões que admitem escoamento turbulento desde o bordo de ataque.

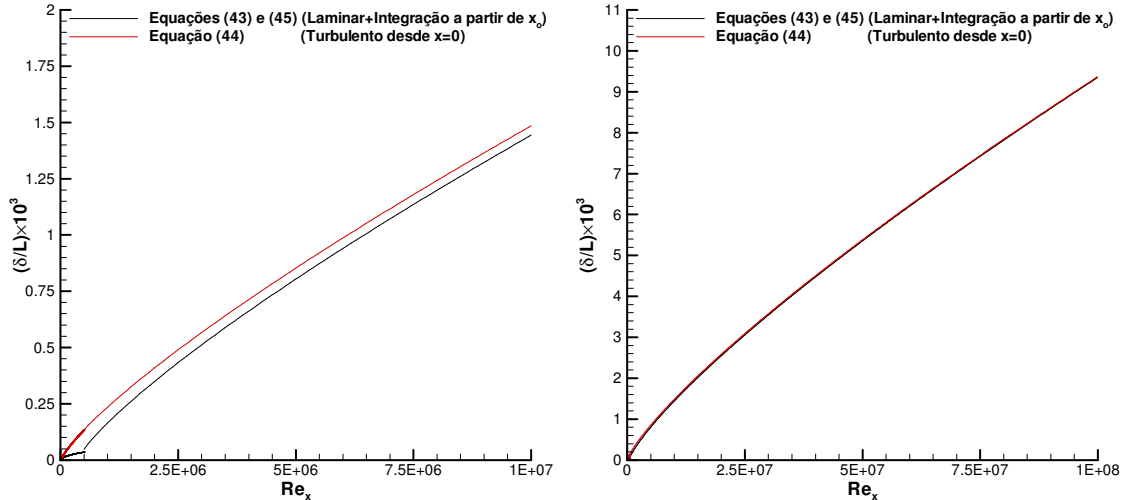


Figura 2 – Evolução da espessura da camda limite com o número de Reynolds, Re_x .

4.3.2 Espessura de deslocamento

A figura 3 apresenta δ^*/L em função do número de Reynolds, Re_x . Os comentários apresentados em cima para a espessura da camada limite também se aplicam aos resultados obtidos para a espessura de deslocamento.

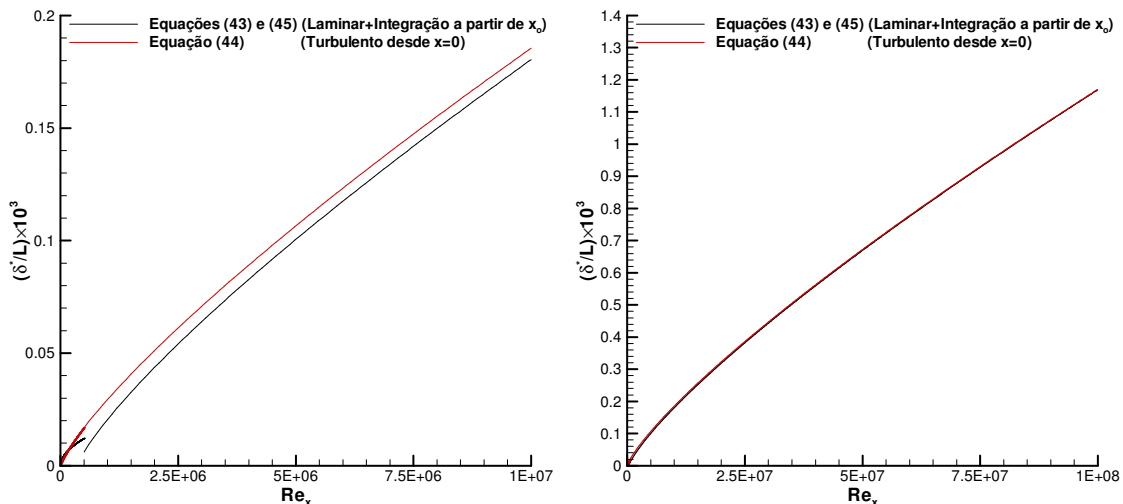


Figura 3 – Evolução da espessura de deslocamento com o número de Reynolds, Re_x .

4.3.3 Espessura de quantidade de movimento

A figura 4 apresenta θ/L em função do número de Reynolds, Re_x . Neste caso existe continuidade no “ponto” de transição. Como θ está relacionado com a força de resistência na parede, existe uma diferença sistemática entre as duas aproximações, porque o nível da tensão de corte na região laminar é diferente para as duas curvas de θ representadas. No entanto, atendendo à precisão deste tipo de soluções esta diferença torna-se também desprezável com o aumento do número de Reynolds.

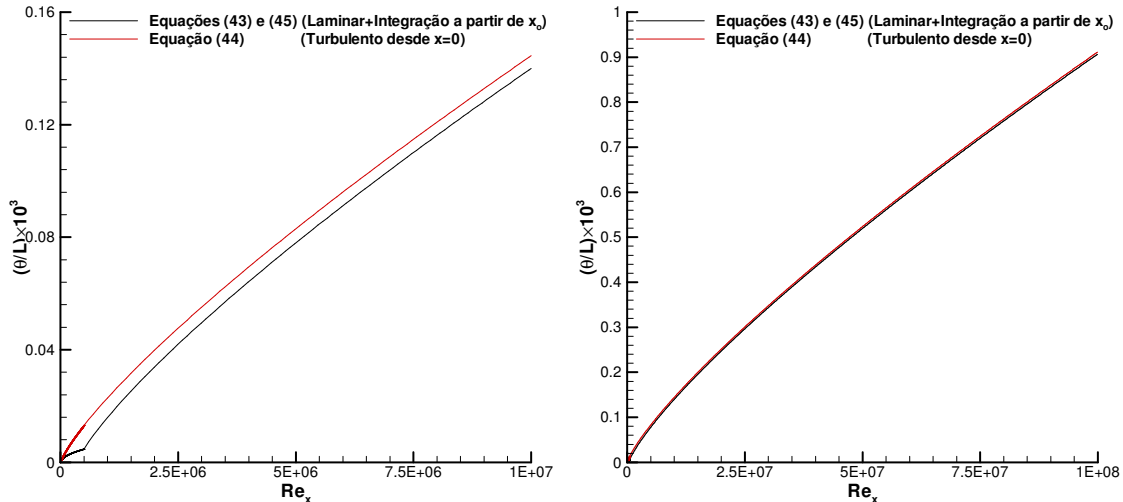


Figura 4 – Evolução da espessura de quantidade de movimento com o número de Reynolds, Re_x .

4.3.4 Coeficiente de tensão de corte superficial

A figura 5 apresenta C_f em função do número de Reynolds, Re_x . Os comentários apresentados em cima para δ e δ^* também se aplicam aos resultados obtidos para a tensão de corte superficial.

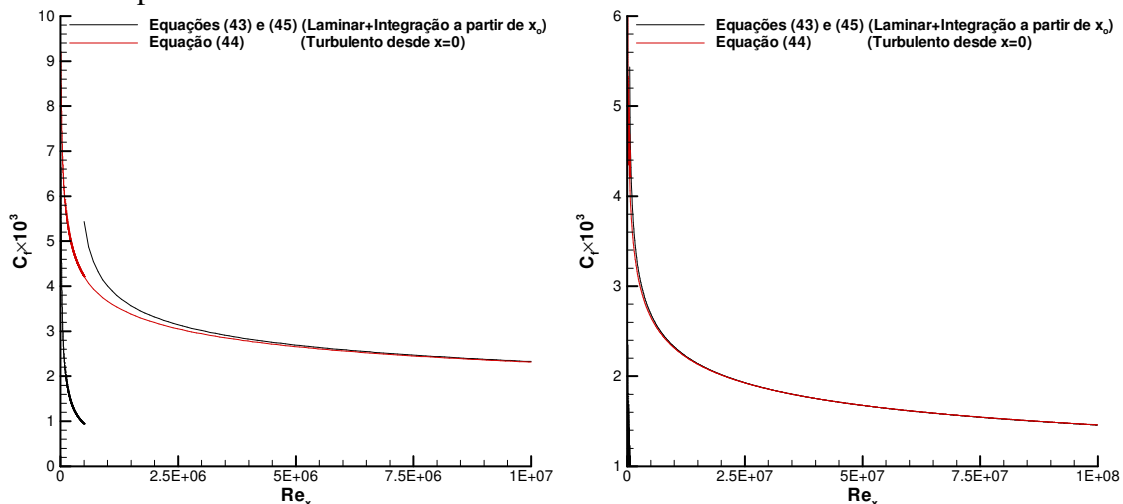


Figura 5 – Evolução do coeficiente de tensão de corte superficial com o número de Reynolds, Re_x .

No modelo adoptado, o aumento de C_f no “ponto” de transição para $Re_{tr}=5\times 10^5$ é de mais de 500% (o mesmo tipo de aumento é obtido para $Re_{tr}=10^6$). Este aumento é consequência da correlação adoptada para C_f estar a ser utilizada para o início da região turbulenta, o que neste caso, se torna uma aproximação um pouco grosseira. O nível de C_f obtido para uma camada limite turbulenta desde o bordo de ataque é inferior e mais representativo dos valores experimentais no final da região de transição.

4.6 Coeficiente de resistência de uma placa de comprimento L

A figura 6 apresenta C_D em função do número de Reynolds, Re_L . Os gráficos apresentam as curvas obtidas com as três alternativas apresentadas anteriormente.

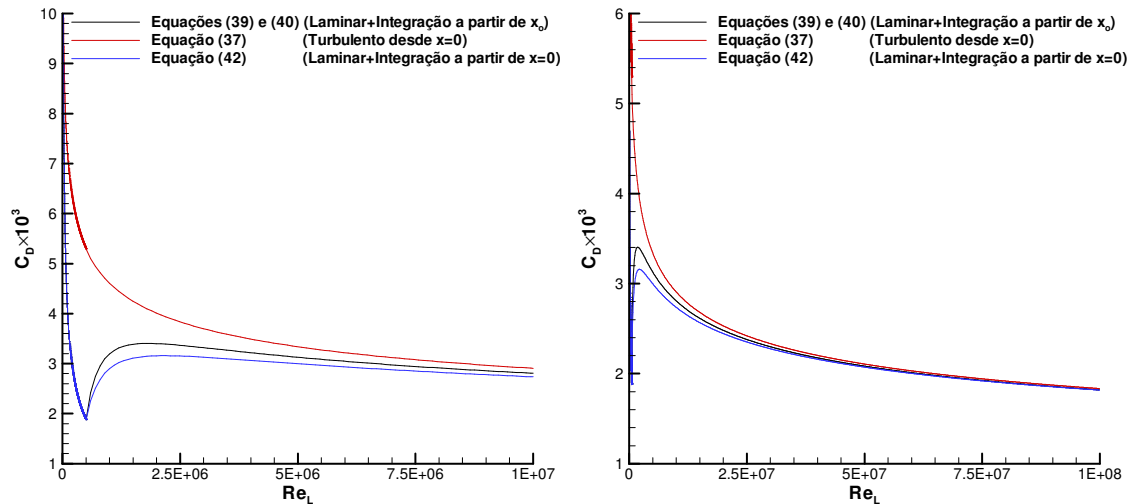


Figura 6 – Evolução do coeficiente de resistência de uma placa plana com o número de Reynolds, Re_L .

Como se pode observar, as diferenças entre as três correlações tendem para zero com o aumento do número de Reynolds. No entanto, para valores de Re_L próximos de Re_{tr} é importante ter em consideração que a camada limite no início da placa se desenvolve em regime laminar. Logicamente, a equação (42) conduz a um aumento mais suave de C_D junto ao Re_{tr} do que a equação (39) (ou (40)), que está mais de acordo com os resultados experimentais.

Referências

- [1] “Fundamentos de Aerodinâmica Incompressível” – Vasco de Brederode. Edição do autor.
- [2] “Fluid Flow” – R.H. Sabersky, A.J. Acosta, E.G. Hauptmann, E.M. Gates, Prentice Hall, Fourth Edition, 1999.
- [3] “Fluid Mechanics” – F.M. White, Third Edition, McGraw Hill, 1999.

Nomenclatura

C_f – Coeficiente de tensão de corte superficial, $C_f = \frac{\tau_w}{1/2 \rho U_e^2}$.

C_D – Coeficiente de resistência, $C_D = \frac{\int_0^L \tau_w dx}{1/2 \rho U_\infty^2 L}$.

D – Diâmetro do tubo.

f – Factor de atrito do escoamento em tubos, $f = 4\tau_w / (1/2 \rho U_{med}^2)$.

h – Distância à parede superior a δ .

H – Factor de forma. $H = \frac{\delta^*}{\theta} = \frac{\delta^*/\delta}{\theta/\delta}$.

H_o – Factor de forma no início da região turbulenta.

L – Comprimento da placa.

p – Pressão relativa à pressão hidrostática.

Re_{cr} – Reynolds crítico, início da transição. $Re_{cr} = U_e x_{cr} / \nu$.

Re_{tr} – Reynolds transição, início da região turbulenta final transição. $Re_{tr} = U_e x_{tr} / \nu$.

Re_L – Reynolds baseado no comprimento da placa. $Re_L = U_e L / \nu$.

Re_x – Reynolds baseado na distância ao bordo de ataque. $Re_x = U_e x / \nu$.

U – Componente de velocidade na direcção horizontal (em média de Reynolds para escoamento turbulento).

U_e – Componente de velocidade na direcção horizontal no escoamento exterior à camada limite.

U_{med} – Velocidade média no escoamento completamente desenvolvido em tubos.

U_{max} – Velocidade máxima no escoamento completamente desenvolvido em tubos.

x – Coordenada Cartesiana horizontal. Origem no bordo de ataque da placa.

x_{cr} – x crítico. Coordenada x no início da transição.

x_{tr} – x transição. Coordenada x no início da região turbulenta (final da transição).

x_v – Coordenada x da “origem virtual” da camada limite turbulenta.

y – Coordenada Cartesiana vertical. Origem na placa.

δ – Espessura da camada limite, $U = 0,995 U_e$.

δ_o – Espessura da camada limite no início da região turbulenta.

δ^* – Espessura de deslocamento, $\delta^* = \int_0^h \left(1 - \frac{U}{U_e}\right) dy$.

δ_o^* – Espessura de deslocamento no início da região turbulenta.

μ – Viscosidade dinâmica.

ν – Viscosidade cinemática.

θ – Espessura de quantidade de movimento, $\theta = \int_0^h \left[\frac{U}{U_e} - \left(\frac{U}{U_e}\right)^2 \right] dy$.

θ_o – Espessura de quantidade de movimento no início da região turbulenta.

τ_w – Tensão de corte na parede, $\tau_w = \mu \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=0}$.