

# Exame de Qualificação em Matemática

## — Lógica e Fundamentos —

Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico

19 de Setembro de 2005

Responda ainda que parcialmente apenas a 8 das 12 perguntas.

Duração: 4 horas.

1. Demonstre que o conjunto dos axiomas (K, S, CR) do cálculo de Hilbert da lógica proposicional clássica é independente.
2. No contexto da lógica proposicional clássica demonstre por via semântica o teorema da interpolação de Craig.
3. Analise a complexidade da eliminação da regra do corte no cálculo de seqüentes para a lógica proposicional clássica.
4. Esboce a demonstração da completude da lógica proposicional intuicionista com semântica de Kripke generalizada.
5. Compare as duas abordagens à axiomatização da lógica de primeira ordem (com e sem a regra da generalização).
6. No contexto da demonstração da completude da lógica de primeira ordem, justifique a necessidade de enriquecer a assinatura e demonstre o lema da preservação da coerência por este enriquecimento.
7. Explique em que consiste o método dos diagramas para construir extensões elementares. Recorra a este método para provar que toda a estrutura de interpretação infinita da lógica de primeira ordem com igualdade tem uma extensão elementar com cardinalidade diferente da estrutura de partida.
8. Enuncie e demonstre o teorema da existência de modelo normal no âmbito da lógica de primeira ordem com igualdade. Relacione o modelo original e o modelo obtido por normalização.
9. Enuncie e demonstre o teorema de Church e explique a sua utilização na demonstração do primeiro teorema da incompletude de Gödel.
10. Demonstre que as noções de subconjunto recursivo e de subconjunto recursivamente enumerável de um universo Gödelizável são robustas face à Gödelização escolhida.
11. Enuncie e demonstre o teorema da recursão. Explique como é utilizado para demonstrar a existência de vírus.
12. Enuncie o axioma da escolha e o lema de Zorn. Demonstre que o axioma da escolha implica o lema de Zorn.