Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Programa de Doutoramento em Matemática
Exame de Qualificação - Geometria e Topologia
Março de 2008

resolva 8 dos 12 problemas propostos
apresente e justifique todos os cálculos
exponha soluções parciais mesmo quando não as consiga completar
duração: 4 horas

(1) Um espaço topológico X diz-se *localmente conexo por arcos* se cada ponto $p \in X$ está contido nalgum aberto conexo por arcos. Mostre que se X é localmente conexo por arcos e conexo então X é conexo por arcos.

(2) Seja (X, d) um espaço métrico completo, e $f : X \to X$ uma aplicação contínua e sobrejectiva tal que

$$d(f(p), f(q)) \geq \alpha \, d(p, q)$$

para algum $\alpha > 1$. Mostre que f possui um e um só ponto fixo. Mostre ainda que X não pode ser compacto.

(3) Mostre que qualquer grupo finito é o grupo fundamental de alguma variedade compacta. (Sugestão: Poderá ser-lhe útil usar o facto de que $SU(2n)$ é simplesmente conexo).

(4) Mostre que não existe nenhuma aplicação contínua $f : S^2 \to S^1$ tal que $f(-p) = -f(p)$.

(5) Seja M uma variedade diferenciável conexa e $N \subset M$ uma subvariedade mergulhada de codimensão $k \geq 2$, conexa. Mostre que $M \setminus N$ é conexo.

(6) Indique explicitamente, para cada $n \in \mathbb{Z}$, uma aplicação diferenciável $f_n : M \to M$ de grau n, onde:

(a) $M = S^2$;
(b) $M = S^3$;
(c) $M = S^1 \times S^1$.

(continua no verso)

(7) Seja $\Phi : G \to H$ um homomorfismo sobrejectivo de grupos de Lie conexos cuja derivada na identidade $d_e\Phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ é um isomorfismo. Mostre que Φ é uma aplicação de revestimento.

(8) Sejam M e N variedades diferenciáveis de dimensão m e n, respectivamente, e ω uma forma-m fechada em N. Mostre que se duas aplicações diferenciáveis $f, g : M \to N$ são homotópicas por uma homotopia diferenciável então $\int_M f^*\omega = \int_M g^*\omega$.

(9) Seja M uma variedade diferenciável compacta de dimensão $n \geq 2$. Uma *métrica Lorentziana* em M é um campo tensorial duas vezes covariante que determina em cada espaço tangente uma forma quadrática equivalente a $\operatorname{diag}(-1, 1, \ldots, 1)$. Mostre que M admite uma métrica Lorentziana *sse* $\chi(M) = 0$.

(10) Seja (M, g) uma variedade Riemanniana homogénea (i.e. cujo grupo de isometrias actua transitivamente). Mostre que (M, g) é geodesicamente completa (ou seja, qualquer geodésica está definida em $\mathbb{R}$).

(11) Em unidades apropriadas, o horizonte de um buraco negro em rotação máxima é a esfera S^2 com a métrica Riemanniana dada nas habituais coordenadas esféricas (θ, φ) por

$$g = (1 + \cos^2\theta)\, d\theta \otimes d\theta + \frac{4 \operatorname{sen}^2\theta}{1 + \cos^2\theta}\, d\varphi \otimes d\varphi.$$

(a) Calcule a curvatura de Gauss do horizonte.

(b) Mostre que não é possível mergulhar o horizonte isometricamente em $\mathbb{R}^3$ como uma superfície de revolução (pode usar, sem demonstração, o facto de que $\frac{\partial}{\partial\varphi}$ é o único campo de Killing do horizonte).

(12) Seja S uma superfície compacta cujo bordo é constituído por $k \geq 3$ circunferências geodésicas. Mostre que existe um ponto em S com curvatura de Gauss negativa.