Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Programa de Doutoramento em Matemática
Exame de Qualificação - Geometria e Topologia
Outubro de 2007

resolva 8 dos 12 problemas propostos
apresente e justifique todos os cálculos
exponha soluções parciais mesmo quando não as consiga completar
duração: 4 horas

(1) Seja X um espaço topológico Hausdorff. Mostre que se $K \subset X$ é compacto então K é fechado. Dê um exemplo de um espaço topológico X e de um subconjunto compacto $K \subset X$ tal que K não é fechado.

(2) Prove o Teorema de Heine-Borel: os subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$ (munido da topologia usual) são os subconjuntos limitados e fechados.

(3) Seja $\mathbb{C}P^2$ o plano projectivo complexo.

(a) Mostre que $\pi_1(\mathbb{C}P^2) = \{e\}$;
(b) Calcule $H_*(\mathbb{C}P^2; \mathbb{Z})$.

(4) Seja $M = \mathbb{R}^3 \setminus (C_1 \cup C_2)$, onde

$$C_1 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\};$$
$$C_2 = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y-1)^2 + z^2 = 1\}.$$

Calcule $H_*(M; \mathbb{Z})$.

(5) Sejam M e N variedades diferenciáveis conexas e compactas de dimensão n, e $f : M \to N$ uma imersão.

(a) Mostre que $f : M \to N$ é um revestimento.
(b) Mostre que não existe nenhuma imersão $f : S^1 \times S^1 \to S^2$.

(6) Seja $f : S^d \to S^d$ um difeomorfismo. Mostre que:

(a) Se f não tem pontos fixos então f é homotópica à aplicação antipodal.
(b) Se d é par e f preserva orientações então f tem pelo menos um ponto fixo.

(continua no verso)

(7) Seja G um grupo de Lie, $X \in \mathfrak{X}(G)$ um campo invariante à esquerda e $Y \in \mathfrak{X}(G)$ um campo invariante à direita. Mostre que X e Y comutam (i.e. $[X, Y] = 0$).

(8) Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n, $\{X_1, \ldots, X_n\}$ um referencial local e $\{\omega^1, \ldots, \omega^n\}$ o co-referencial dual. Mostre que

$$d\omega^i + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} C^i_{jk} \omega^j \wedge \omega^k = 0,$$

onde as n^3 funções de estrutura C^i_{jk} são definidas por

$$[X_j, X_k] = \sum_{i=1}^{n} C^i_{jk} X_i.$$

(9) Mostre que não existem distribuições de dimensão 1 em S^2.

(10) Determine todas a conexões afins em $\mathbb{R}^n$ cujas geodésicas são as aplicações afins $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ (i.e. $c(t) = at + b$ com $a, b \in \mathbb{R}^n$).

(11) Calcule a curvatura de Gauss de $\mathbb{R}^2$ munido da métrica

$$g = \frac{1}{\cosh^2(y)} \left(dx \otimes dx + dy \otimes dy \right).$$

Qual a relação desta variedade Riemanniana com S^2 (munido da métrica usual)?

(12) Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão 2, compacta e orientável, com curvatura de Gauss K positiva em todos os pontos. Prove que quaisquer duas geodésicas cujas imagens sejam curvas simples fechadas têm que se intersectar.