Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Programa de Doutoramento em Matemática
Exame de Qualificação - Geometria e Topologia
Março de 2007

resolva 8 dos 12 problemas propostos
apresente e justifique todos os cálculos
exponha soluções parciais mesmo quando não as consiga completar
duração: 4 horas

(1) Seja X um espaço topológico e $\sim$ uma relação de equivalência em X tal que a projecção natural $\pi : X \to X/\sim$ é aberta. Mostre o quociente $X/\sim$ é Hausdorff *sse* o conjunto

$$R = \{(p, q) \in X \times X \mid p \sim q\}$$

é fechado.

(2) (a) Mostre que existe uma métrica d em $\mathbb{R}^n$ que determina a topologia usual mas tal que $(\mathbb{R}^n, d)$ não é completo.
(b) Mostre que existe uma métrica δ em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ que determina a topologia usual mas tal que $(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \delta)$ é completo.

(3) Para cada $n \in \mathbb{N}$ indique uma variedade cujo grupo fundamental é $\mathbb{Z}_n$.

(4) Mostre que $S^m \times S^n$ é homeomorfo a $S^p \times S^q$ *sse* $m = p$ e $n = q$ ou $m = q$ e $n = p$.

(5) Calcule $H_*(S^3 \setminus (F_1 \cup F_2))$, onde F_1 e F_2 são duas fibras distintas da fibração de Hopf.

(6) Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n simplesmente conexa, e $N \subset M$ uma subvariedade mergulhada e fechada de dimensão $n - 1$. Mostre que se N é conexa e orientável então $M \setminus N$ possui duas componentes conexas.

(7) Seja M uma variedade com bordo de dimensão 2, compacta, com ∂M difeomorfo a S^1. Seja $\omega \in \Omega^1(M)$ uma forma-1 cuja restrição a ∂M é a forma-1 $\sigma = \cos\theta d\theta$, onde θ é a habitual coordenada angular em S^1. Mostre que $d\omega$ tem pelo menos um zero em $M \setminus \partial M$.

(continua no verso)

(8) Calcule o grau da aplicação $f : \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n$ dada por

$$f\left(\left[z^0, \ldots, z^n\right]\right) = \left[(z^0)^k, \ldots, (z^n)^k\right] \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

(9) Seja M uma variedade diferenciável de dimensão 2, $\alpha \in \Omega^1(M)$ uma forma-1 e $p \in M$ tal que $\alpha_p \neq 0$. Mostre que existe um aberto $U \ni p$ e funções $f, g \in C^\infty(U)$ tais que $\alpha|_U = f dg$.

(10) Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície de revolução. Um *paralelo* de S é a intersecção de S com um plano perpendicular ao eixo de revolução.

(a) Seja $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to S$ uma geodésica, $r : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a função distância ao eixo de revolução e $\beta(t)$ o ângulo entre a geodésica e o paralelo que passa pelo ponto $\gamma(t)$. Prove a *relação de Clairaut*:

$$r(\gamma(t)) \cos(\beta(t)) = \text{constante}.$$

(b) Use a relação de Clairaut para mostrar que qualquer geodésica de um elipsóide de revolução ou é uma curva fechada ou se auto-intersecta infinitas vezes.

(11) Prove o Teorema de Schur: qualquer variedade Riemanniana conexa e isotrópica de dimensão $n \geq 3$ tem curvatura constante.

(12) Mostre que qualquer grupo de Lie G compacto e conexo de dimensão 2 admite uma métrica plana. Conclua que G é difeomorfo ao toro T^2.