Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Programa de Doutoramento em Matemática
Exame de Qualificação - Geometria e Topologia
Fevereiro de 2006

resolva 8 dos 12 problemas propostos
apresente e justifique todos os cálculos
exponha soluções parciais mesmo quando não as consiga completar
duração: 4 horas

(1) Seja X um espaço topológico. Uma aplicação $f : X \to \mathbb{R}$ diz-se *semi-contínua superior* se é contínua para a topologia
$$\mathcal{O} = \{\,]-\infty, a\,[\,: a \in \mathbb{R}\} \cup \{\varnothing, \mathbb{R}\}$$
de $\mathbb{R}$. Mostre que se X é compacto e f é semicontínua superior então f possui um ponto de máximo. Terá f necessariamente um ponto de mínimo?

(2) Seja (X, d) um espaço métrico e H a colecção dos subconjuntos fechados, limitados e não vazios de X. A *métrica de Hausdorff* em H é a aplicação $d_H : H \times H \to \mathbb{R}$ dada por
$$d_H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset V_\varepsilon(B) \text{ e } B \subset V_\varepsilon(A)\}.$$
Mostre que se (X, d) é completo então (H, d_H) também é completo.

(Sugestão: Se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy, suponha sem perda de generalidade que $d_H(A_n, A_{n+1}) < \frac{1}{2^n}$, e considere o fecho do conjunto dos limites de sucessões $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tais que $a_n \in A_n$ e $d(a_n, a_{n+1}) < \frac{1}{2^n}$).

(3) Sabendo que o grupo icosaedral binário $I \subset S^3$ é perfeito (i.e. coincide com o subgrupo dos comutadores), indique uma variedade diferenciável M tal que $H_1(M; \mathbb{Z}) = \{0\}$ mas $\pi_1(M) \neq \{e\}$.

(4) Mostre que $\chi(M \times N) = \chi(M)\chi(N)$ para quaisquer variedades diferenciáveis compactas M e N.

(5) Seja M uma variedade diferenciável de dimensão 3 compacta e não-orientável. Mostre que $H^1_{dR} \neq \{0\}$.

(6) Seja Σ uma superfície compacta e $f : \Sigma \to S^2$ uma imersão. Mostre que f é um difeomorfismo.

(continua no verso)

(7) Seja M uma variedade compacta e $\omega \in \Omega^1(M)$ uma forma-1 fechada sem zeros. Mostre que $H^1_{dR}(M) \neq \{0\}$.

(8) Mostre que qualquer aplicação $f : S^d \to T^d$ de classe C^∞ tem grau zero para $d \geq 2$ ($T^d = S^1 \times \ldots \times S^1$ designa o toro d-dimensional). Dê um exemplo de uma aplicação $g : T^2 \to S^2$ com grau diferente de zero.

(9) Use o Teorema de Frobenius para mostrar que qualquer forma-1 fechada é localmente exacta.

(10) Se $(G, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é um grupo de Lie com uma métrica bi-invariante então a aplicação exponencial $\exp : \mathfrak{g} \to G$ coincide com a exponencial geodésica $\exp_e : T_eG \to G$.

(a) Mostre que se X, Y são campos invariantes à esquerda então $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$, onde ∇ é a conexão de Levi-Civita.

(b) Mostre que se X, Y, Z são campos invariantes à esquerda então $R(X, Y)Z = \frac{1}{4}[[X, Y], Z]$.

(11) (a) Calcule a curvatura de Gauss de uma superfície de revolução em $\mathbb{R}^3$.

(b) Determine todas as superfícies de revolução com curvatura de Gauss constante.

(12) Seja $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ uma subvariedade de dimensão 2 mergulhada, conexa e compacta (portanto orientável). Seja $g : \Sigma \to S^2$ a aplicação de Gauss correspondente a uma dada orientação (i.e. $g(p)$ é o vector normal unitário a Σ no ponto p compatível com a orientação). Mostre que o grau de g é $\frac{1}{2}\chi(M)$.