Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Programa de Doutoramento em Matemática
Exame de Qualificação - Geometria e Topologia
Maio de 2005

resolva 8 dos 12 problemas propostos
apresente e justifique todos os cálculos
exponha soluções parciais mesmo quando não as consiga completar
duração: 4 horas

(1) Seja X um espaço topológico e $A \subset X$. Mostre que se $C \subset X$ é conexo e C intersecta A e $X \setminus A$ então C também intersecta a fronteira de A.

(2) Seja X um espaço topológico localmente compacto e Hausdorff. Mostre que X é completamente regular, i.e., que dados $F \subset X$ fechado e $x \in X \setminus F$, então existe uma função $f : X \to [0,1]$ contínua tal que $f(x) = 0$ e $f(F) = \{1\}$.

(3) Seja $C_n = \{e^{\frac{2k\pi i}{n}} : k = 0, \ldots, n-1\}$ o grupo das raízes de indíce n da unidade e $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ a 3-esfera. Para a acção de C_n em S^3 determinada pela fórmula

$$\alpha \cdot (z_1, z_2) = (\alpha z_1, \alpha z_2),$$

calcule o grupo fundamental do espaço das suas órbitas $L_n = S^3/C_n$, equipado com a topologia quociente.

(4) Determine os grupos de homologia do subespaço topológico $A \subset \mathbb{R}^3$ dado por:

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x\left((\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2 + z^2 - 1\right) = 0\}.$$

(5) Seja G um grupo abeliano e $k > 1$ um inteiro. Mostre que existe um espaço topológico X com grupo de homologia $H_k(X) = G$.

(6) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma aplicação C^∞ homogénea de grau $k \neq 0$ (i.e., $f(tx) = t^k f(x)$ para todo o $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$).

(a) Mostre que se $a \neq 0$ e $f^{-1}(a) \neq \emptyset$ então $f^{-1}(a)$ é uma subvariedade de $\mathbb{R}^n$ de dimensão $n-1$.

(b) Mostre que se $ab > 0$ então $f^{-1}(a)$ é difeomorfa a $f^{-1}(b)$.

(continua no verso)

(7) Seja M uma variedade simplesmente conexa. Mostre que M é orientável.

(8) Seja M uma variedade diferenciável e $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ campos vectoriais completos.

(a) Mostre que se os fluxos de X e de Y comutam então $[X, Y] = 0$.

(b) Mostre que se G é um grupo de Lie abeliano então a sua álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é abeliana (i.e., $[v, w] = 0$ para todo o $v, w \in \mathfrak{g}$).

(9) Seja M uma variedade com bordo compacta e orientável. Mostre que não existe nenhuma aplicação $f : M \to \partial M$, de classe C^∞, tal que $f|_{\partial M} = \mathrm{id}$.

(10) Considere os conjuntos

$$S^3 = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 2\right\};$$
$$T^2 = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 = z^2 + w^2 = 1\right\}.$$

Verifique que $S^3 \setminus T^2$ possui duas componentes conexas. Sendo M uma destas componentes conexas e

$$\omega = z dx \wedge dy \wedge dw - x dy \wedge dz \wedge dw,$$

calcule $\int_M \omega$ para uma orientação da sua escolha.

(11) Prove que qualquer grupo de Lie possui uma única conexão ∇ com curvatura nula, para a qual os campos invariantes à esquerda são paralelos. Calcule o tensor de torção desta conexão.

(12) Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão 2, e $\Delta \subset M$ um *triângulo geodésico*, i.e., um aberto homeomorfo a um disco cuja fronteira está contida na união das imagens de três geodésicas. Sejam α, β, γ os ângulos internos de Δ, i.e., os ângulos entre as geodésicas nos pontos de intersecção contidos na fronteira de Δ. Prove que

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \int_\Delta K,$$

onde K é a curvatura de Gauss de M.