Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Programa de Doutoramento em Matemática
Exame de Qualificação - Geometria e Topologia
Março de 2004

resolva 8 dos 12 problemas propostos
apresente e justifique todos os cálculos
exponha soluções parciais mesmo quando não as consiga completar
duração: 4 horas

(1) Seja X um espaço topológico, $U \subset X$ um conjunto aberto e $K \subset X$ um conjunto compacto. Se $C \subset X$ é um subconjunto fechado, conexo e Hausdorff (para a topologia induzida), tal que $C \cap U = C \cap K \neq \emptyset$, mostre que $C \subset U$.

(2) Seja X um espaço métrico compacto e $F \subset X$ um subconjunto fechado. Seja $p : X \to Y$ um homeomorfismo local tal que a restrição $p|_F$ é injectiva. Mostre que existe uma vizinhança U de F tal que $p|_U$ é injectiva.

(3) Descreva o revestimento universal da Banda de Möbius (sem bordo), bem como a acção do grupo de transformações de revestimento.

(4) Sejam M e N variedades conexas de dimensão d. Seja $M\#N$ a soma conexa de M e N. Verifique que as características de Euler de M, N e $M\#N$ estão relacionadas por:

$$\chi(M\#N) = \chi(M) + \chi(N) - \chi(\mathbb{S}^d).$$

Nota: Recorde que $M\#N$ é a variedade obtida por colagem de M e N ao longo do bordo de abertos difeomorfos à bola $\{x \in \mathbb{R}^d : ||x|| < 1\}$.

(5) Para cada $n \in \mathbb{N}$, calcule os grupos de homologia $H_*(\mathbb{T}^n; \mathbb{Z})$ do toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$.

(6) Seja V um espaço vectorial de dimensão n e considere o conjunto $Gr(n, k)$ formado pelos subespaços de V com dimensão k. Mostre que $Gr(n, k)$ é uma variedade de dimensão $k(n - k)$.

(continua no verso)

(7) Sejam M e N variedades. Se $M \times N$ é orientável, o que pode dizer sobre a orientabilidade de M e N?

(8) Seja $p : M \to N$ uma aplicação diferenciável entre duas variedades compactas, conexas, orientáveis, da mesma dimensão. Mostre que se o grau de p é diferente de zero então p é sobrejectiva.

(9) Sejam $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ funções suaves em $\mathbb{R}^n$ e sejam (x, z) coordenadas em $\mathbb{R}^{n+1}$, com $x \in \mathbb{R}^n$ e $z \in \mathbb{R}$. Considere a distribuição n-dimensional em $\mathbb{R}^{n+1}$ gerada pelos campos vectoriais

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + a_i(x) \frac{\partial}{\partial z} \,, \qquad i = 1, \ldots, n \,.$$

Determine condições para que esta distribuição seja involutiva.

(10) Seja M uma variedade de dimensão n e $f \in C^\infty(M)$ uma função com um ponto crítico em $p \in M$. Dados vectores $X, Y \in T_pM$, sejam $\widetilde{X}$ e $\widetilde{Y}$ campos vectoriais numa vizinhança de p que estendem X e Y. Mostre que a aplicação (chamada a *hessiana* de f em p)

$$\begin{array}{rccc} H: & T_pM \times T_pM & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (X, Y) & \mapsto & \left(L_{\widetilde{X}} (L_{\widetilde{Y}} f) \right) (p) \end{array}$$

está bem definida (ou seja, é independente da escolha das extensões de X e Y), é bilinear e é simétrica. Seja $(\mathcal{U}, x_1, \ldots, x_n)$ uma carta de coordenadas para M centradas em p. Mostre que, na base de T_pM induzida por estas coordenadas, a matriz que representa H é a matriz das derivadas parciais de segunda ordem

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0) \right) \,.$$

(11) Seja ∇ uma conexão numa variedade diferenciável M. Mostre que existe uma conexão $\widetilde{\nabla}$ em M, sem torção, e com as mesmas geodésicas que ∇.

(12) Seja (M, g) uma variedade Riemanniana e $f : M \to \mathbb{R}$ uma função C^∞. Define-se o campo vectorial *gradiente de* f, $\nabla f \in \Gamma(TM)$, pela fórmula

$$g(\nabla f, X) = df(X) \,, \ \forall X \in \Gamma(TM) \,.$$

Mostre que se $\|\nabla f\| \equiv 1$ então as curvas integrais de ∇f são geodésicas.