Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

PROGRAMA DE DOUTORAMENTO EM MATEMÁTICA

EXAME DE QUALIFICAÇÃO – GEOMETRIA E TOPOLOGIA

30 DE SETEMBRO DE 2003

resolva 8 dos 12 problemas propostos

apresente e justifique todos os cálculos

exponha soluções parciais, mesmo quando não as consiga completar

duração: 4 horas

(1) Seja E um espaço topológico e $\Delta = \{(a,a) : a \in E\}$ a diagonal de E^2. Prove que o conjunto Δ é fechado em E^2 se e só se E é Hausdorff.

(2) Sejam X e Y espaços métricos com funções distância $d_X : X \times X \to \mathbb{R}$ e $d_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}$. Seja $f : X \to Y$ uma aplicação tal que

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2) \ , \quad \forall x_1, x_2 \in X \ .$$

Mostre que f é um homeomorfismo para a sua imagem.

(3) Seja X uma variedade compacta de dimensão n, e seja $Y \subset X$ uma subvariedade fechada de dimensão m. Mostre que a característica de Euler $\chi(X \setminus Y)$ do complementar de Y em X é dada por

$$\chi(X \setminus Y) = \chi(X) + (-1)^{n-m-1}\chi(Y) \ .$$

(4) Prove o teorema do ponto fixo de Brouwer: que qualquer aplicação contínua do disco n-dimensional fechado $D^n \subset \mathbb{R}^n$ para si próprio tem que ter um ponto fixo.

(5) Prove que o conjunto de todas as matrizes 2×2 com característica 1 é uma subvariedade de dimensão 3 em $\mathbb{R}^4$.

(6) Mostre que o espaço projectivo real, $\mathbb{RP}^n$, é orientável se e só se n é ímpar. (Sugestão: mostre que a aplicação antipodal na esfera S^n preserva orientação se e só se n é ímpar.)

(continua)

(7) Uma forma simpléctica numa variedade de dimensão $2n$ é uma forma ω de grau dois fechada e tal que a sua n-ésima potência exterior ω^n é uma forma de volume. Mostre que nenhuma esfera S^{2n} de dimensão $2n > 2$ possui formas simplécticas.

(8) Seja M uma variedade compacta de dimensão n, e seja $f : M \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação suave. Prove que f não pode ser sempre regular.

(9) Seja M uma variedade conexa, e seja $\pi : M \times N \to N$ a projecção natural. Prove que uma forma β de grau p em $M \times N$ é da forma $\pi^*\alpha$ para alguma forma α em N se e só se $\imath_X \beta = 0$ e $\mathcal{L}_X \beta = 0$ para todos os campos vectoriais X em $M \times N$ que satisfaçam $d\pi(X) = 0$ em todos os pontos.

(10) Seja

$$\alpha = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} \ .$$

Prove que α é uma forma-1 fechada em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Calcule o integral de α sobre a circunferência unitária S^1. Como é que esse resultado mostra que α não é exacta? E como é que mostra que $i^*\alpha$ não é exacta, onde $i : S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ é o mergulho usual?

(11) Seja N uma variedade riemanniana n-dimensional com conexão de Levi-Civita ∇. Seja M uma hipersuperfície (i.e., uma subvariedade mergulhada de dimensão $n-1$) em N com um campo vectorial normal unitário Y, e seja X um qualquer campo vectorial tangente a M. Prove que a derivada covariante $\nabla_X Y$ é tangente a M.

(12) Sejam ∇ e $\widetilde{\nabla}$ conexões numa variedade diferencial M, e defina-se

$$B(X,Y) = \nabla_X Y - \widetilde{\nabla}_X Y \ .$$

Mostre que B é tensorial, i.e., $B(X,Y)(p)$ depende apenas dos valores X_p e Y_p dos campos vectoriais no ponto p.

Mostre que ∇ e $\widetilde{\nabla}$ têm as mesmas geodésicas se e só se $B(X,X) = 0$ para todos os campos vectoriais X.