INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
EXAME DE QUALIFICAÇÃO PARA O PROGRAMA DE DOUTORAMENTO
ÁREA DE ANÁLISE NUMÉRICA
27 de Outubro de 2006
GRUPO I
Responda a 6 das seguintes 7 questões:

1. Considere o seguinte sistema de equações não- lineares:

$$\begin{cases} x_1 + \alpha e^{\beta x_2} = 0, \\ x_2 + \beta e^{\alpha x_1} = 0. \end{cases}$$

   onde α, β são constantes reais.

   (a) Que condições devem satisfazer α e β para que o sistema considerado tenha uma única solução em $I\!R^+ \times I\!R^+$?

   (b) Admitindo que α e β satisfazem as condições referidas na alínea anterior, escreva as equações de um método iterativo para aproximar a solução do sistema e justifique que o método converge, qualquer que seja a aproximação inicial $x^{(0)} \in I\!R^+ \times I\!R^+$.

2. Considere o sistema linear $Ax = b$, onde A é uma matriz quadrada de ordem n, $b \in I\!R^n$. Designemos por $\|\|_p$ uma norma em $I\!R^n$ e a norma por ela induzida no espaço das matrizes quadradas de ordem n. Defina o número de condição $cond_p$ nessa norma e mostre que

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \leq cond_p(A) \frac{\|\tilde{b} - b\|_p}{\|b\|_p},$$

   onde $\tilde{b}$ é um vector próximo de b e $\tilde{x}$ é tal que $A\tilde{x} = \tilde{b}$.

3. Sejam l_i os polinómios de Lagrange, correspondentes aos nós x_i, $i = 0, 1, ..., n$. Mostre que

$$\sum_{i=0}^{n} l_i(x) \equiv 1, \qquad (x \in I\!R).$$

4. Determine o polinómio p_2 (de grau menor ou igual a 2) que minimiza o funcional

$$\int_0^1 (x^3 - p_2(x))^2 dx.$$

5. Seja $\{P_j\}_{j=0}^n$ um sistema de polinómios ortogonais, em relação ao produto interno $(u, v) = \int_{-1}^1 u(x)v(x)(1 - x^2)dx$, e tais que $P_j(1) = 1, \forall j \geq 0$. Determine P_0,P_1 e P_2.

6. Determine os pesos $A_j, j = 1, 2, 3$ da fórmula de quadratura

$$Q(f) = A_1 f(-1/2) + A_2 f(0) + A_3 f(1/2),$$

de modo a que ela seja, pelo menos, de grau 2 para o cálculo do integral

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx.$$

Qual é, de facto, o grau desta fórmula?

7. Investigue a zero-estabilidade e a ordem da seguinte fórmula explícita para uma equação diferencial ordinária de primeira ordem $y' = f(x, y)$:

$$y_{n+1} = y_n + y_{n-1} - y_{n-2} + 2h(y'_n - y'_{n-1}).$$

GRUPO II

Responda a 2 das seguintes 3 questões:

1. Considere o seguinte problema de valores de fronteira para a equação de Laplace:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0, \qquad (x,y) \in \Omega, \\ u(x,y) = x^2 + y^2, \qquad (x,y) \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

onde $\Omega = [0,1] \times [0,1]$.

Suponhamos que se utiliza um esquema de diferenças finitas de 5 pontos, com uma malha uniforme, de passo h, para aproximar a solução deste problema.

 (a) No caso de $h = 1/4$, escreva o sistema de equações lineares resultante.

 (b) Diga, justificando, qual é a ordem do esquema utilizado.

2. Considere um problema de valores de fronteira para a equação do calor unidimensional:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x), \qquad x \in [0,L], \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = \phi(x), \\ u(0,t) = u(L,t) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

 (a) Escreva as equações de um esquema de diferenças explícito para o problema (2), com passo Δx no espaço e passo Δt no tempo, que seja de ordem 1 em relação a Δt e de ordem 2 em relação a Δx.

 (b) Que condição devem satisfazer os passos Δt e Δx para que o esquema dado seja estável? Justifique.

3. Pretende-se determinar a solução u do problema

$$\begin{aligned} \lambda\, u(x,y) - \operatorname{div}(\Phi \operatorname{grad} u(x,y)) = f(x,y), \qquad (x,y) \in \Omega, \\ u(x,y) \equiv 0, \qquad x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{3}$$

onde Ω é um domínio limitado e conexo em $\mathbb{R}^2$, $\phi(x,y) = x^2 + y^2 + \mu$, com $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $f(x,y) = |y - 1/2|$.

 (a) Escreva a formulação variacional associada a este problema, mostrando que a solução fraca é única em $H_0^1(\Omega)$ e indique qual o funcional de energia que ela minimiza neste espaço.

 (b) Mostre que a solução fraca é também uma solução forte, justificando que $f \in L^2(\Omega)$ e $u \in H^2(\Omega)$.