**Instituto Superior Técnico**
**Departamento de Matemática**

# EXAME DE QUALIFICAÇÃO EM MATEMÁTICA

## ÁLGEBRA

30 de Setembro de 2005

Duração: 4 horas

Resolva 8 dos 10 problemas propostos. Em cada problema escolhido, mesmo que não consiga uma resposta completa, exponha a solução parcial que obteve.

**1.** Considere uma sucessão exacta de grupos da forma

$$1 \to H \to G \xrightarrow{\pi} K \to 1$$

(a) Mostre que, se o homomorfismo $\pi$ admite uma secção (*i*.e. um homomorfismo $s\colon K \to G$ tal que $\pi \circ s = \mathrm{id}_K$), então $G$ é isomorfo a um produto semidirecto $K \ltimes H$.

(b) Mostre que se $\pi$ admite uma secção $s$ tal que $\operatorname{Im} s \rhd G$, então $G$ é isomorfo ao produto directo $K \times H$.

**2.** Seja $A$ um anel comutativo. Considere o seguinte diagrama na categoria de $A$-módulos:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & M_1 \\ M_2 & \end{tikzcd}$$

(a) Prove que existe o *pushout* deste diagrama. Ou seja, prove que existe um $A$-módulo $M$ com morfismos $j'\colon M_1 \to M$, $i'\colon M_2 \to M$ tais que $j' \circ i = i' \circ j$ e, dados morfismos $f\colon M_1 \to L$, $g\colon M_2 \to L$ satisfazendo $f \circ i = g \circ j$, existe um único morfismo que torna o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & M_1 \arrow[d, "j'"'] \arrow[ddr, "f"] & \\ M_2 \arrow[r, "i'"] \arrow[drr, "g"'] & M \arrow[dr, dashed] & \\ & & L \end{tikzcd}$$

(b) Mostre que se $i$ (respectivamente $j$) é injectivo então $i'$ (respectivamente $j'$) também o é.

**3.** Seja $A$ um anel comutativo. Diz-se que um $A$-módulo $I$ é *injectivo* se, para toda a inclusão de $A$-módulos $M' \hookrightarrow M$, e todo o homomorfismo de $A$-módulos $f\colon M' \to I$ existe uma extensão $g\colon M \to I$ de $f$.

(a) Mostre que se $I$ é injectivo, então toda a sucessão exacta da forma

$$0 \to I \to M_1 \to M_2 \to 0$$

se cinde.

(b) Reciprocamente, mostre que se toda a sucessão acima se cinde então $I$ é injectivo.

**4.** (a) Seja $G$ um grupo finito que age num conjunto finito $X$. Prove a *fórmula de Burnside*:

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$

onde $X^g = \{x \in X \mid gx = x\}$ e $|X/G|$ é o número de órbitas da acção.

(b) Use a fórmula de Burnside para calcular o número de maneiras não equivalentes de colorir as arestas de um octógono com duas cores, de forma a que haja quatro arestas de cada cor.

**5.** Seja $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ (o grupo das matrizes $n \times n$ invertíveis, com entradas em $\mathbb{F}_p$).

(a) Calcule a ordem de $G$.

(b) Determine os $p$-subgrupos de Sylow de $G$.
**Sugestão:** Dado $g \in G$ tal que $g^{p^k} = 1$ determine o polinómio característico de $g$. Procure concluir algo acerca da representação matricial de $g$ numa base apropriada de $(\mathbb{F}_p)^n$.

**6.** Sejam $m, n \in \mathbb{Z}$ e seja $d = \mathrm{mdc}(m, n)$. Mostre que $\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_d$.

**7.** Seja $F$ um corpo e seja $G$ um subgrupo finito de $F^\times$. Mostre que $G$ é cíclico.

**8.** Determine geradores e relações para o grupo de Galois de $f(x) = (x^3 - 2)(x^3 - 5)$ sobre $\mathbb{Q}$.

**9.** Sejam $A$ um anel comutativo, $M$ um $A$-módulo noetheriano, e $f\colon M \to M$ um homomorfismo sobrejectivo de $A$-módulos. Mostre que $f$ é um isomorfismo.

**10.** Seja $k$ um corpo algebricamente fechado, de característica diferente de $2$, e seja $I \subset k[x, y, z]$ o ideal gerado por $x^2 + y^2 + z^2$ e $x^2 - y^2 - z^2 + 1$. Mostre que o anel $A = k[x, y, z]/\sqrt{I}$ tem divisores de zero (onde $\sqrt{I}$ designa o radical de $I$).