INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
EXAME DE QUALIFICAÇÃO PARA O PROGRAMA DE DOUTORAMENTO
ÁREA DE ANÁLISE NUMÉRICA
20 de Dezembro de 2004
GRUPO I
Responda a 6 das seguintes 7 questões:

1. Suponhamos que a função f (de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$) tem uma raiz de multiplicidade $k > 1$ em $z \in \mathbb{R}$ e é continuamente diferenciável numa vizinhança de z. Mostre que o método de Newton converge linearmente para z (desde que x_0 esteja suficientemente próximo de z) e calcule o coeficiente assimptótico de convergência.

2. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz simétrica e definida positiva, com os valores próprios $0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n$. Considere o seguinte método iterativo para a resolução do sistema linear $A\,x = b$:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \tau\left(Ax^{(k)} - b\right), \qquad \tau \in \mathbb{R}.$$

   (a) Determine, em termos dos valores próprios de A, um intervalo de valores de τ para os quais o método seja convergente.

   (b) Qual o valor de τ que garante a convergência mais rápida?

3. Seja f uma função definida no intervalo $[0, 1]$ tal que a sua derivada de ordem m é contínua e satisfaz

$$|f^{(m)}(x)| \leq m!, \quad m = 0, 1, 2, \ldots \quad 0 \leq x \leq 1.$$

   Seja p_n o polinómio interpolador de f nos pontos $1, q, q^2, \ldots, q^n$, e q um número real tal que $0 < q < 1$. Mostre que $\lim_{n\to\infty} p_n(0) = f(0)$.

4. Seja $f \in C^2([a, b])$.

   (a) Prove a seguinte igualdade (regra do ponto médio):

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi), \qquad \xi \in [a, b].$$

   (b) Deduza a regra composta correspondente e a respectiva fórmula do erro.

5. Sejam dados os números reais distintos $x_1 < x_2 < x_3$. Pretende-se provar que existe um único polinómio $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ que resolve o problema

$$p(x_1) = f(x_1), \quad p(x_2) = f(x_2), \quad p(x_3) = f(x_3), \quad p'(x_2) = f'(x_2),$$

   onde f é uma função dada.

(a) Escreva o problema na forma matricial $Xa = b$, com $a = (a_3, a_2, a_1, a_0)$ e $b = (f(x_1), f(x_2), f(x_3), f'(x_2))^T$. Mostre em seguida que a matriz X é não singular. *Sugestão:* mostre que o sistema homogéneo associado tem apenas a solução trivial.

(b) Supondo que $f \in C^4([x_1, x_3])$, prove que, para cada $x \in [x_1, x_3]$, se tem

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\omega(x),$$

onde $\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2)^2(x - x_3)$ e $\xi = \xi(x) \in]x_1, x_3[$. *Sugestão*: considere a função auxiliar, com x fixo:

$$\Phi(t) = (f(t) - p(t)) - (f(x) - p(x))\frac{\omega(t)}{\omega(x)}.$$

6. Considere o espaço linear $C([2,3])$ munido da norma uniforme. Que pode dizer acerca da existência e unicidade da melhor aproximação da função $f(x) = x^2$ no conjunto

$$S = \{p : p(x) = x^2 + 3x + \alpha, \alpha \in \mathbb{R}, x \in [2,3]\}?$$

Se a melhor aproximação existir e for única, indique-a.

7. Considere a equação diferencial:

$$y' = f(x, y),$$

onde f é uma função quatro vezes diferenciável em ordem a x e a y. Com o objectivo de aproximar a solução de um certo problema de Cauchy para esta equação, considere o método multipasso

$$u_{i+1} = -4u_i + 5u_{i-1} + h(4f_i + 2f_{i-1}), \qquad i = 1, 2, \ldots$$

(a) Determine a sua ordem.

(b) Analise o método no que diz respeito à consistência e à estabilidade.

GRUPO II

Responda a 2 das seguintes 3 questões:

1. Considere o esquema de diferenças finitas

$$u_{ij} = 1/5(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} + 1/20(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1})$$

para aproximar a solução do seguinte problema de valores de fronteira:

$$\begin{array}{cc} \Delta u = 0, & (x,y) \in \Omega =]0,3[\times]0,3[, \\ u(x,y) = g(x,y) = x(3-y), & (x,y) \in \partial\Omega. \end{array}$$

(a) Explicite os sistemas a resolver para o problema de Dirichlet considerado, usando o esquema anterior e o esquema clássico, considerando uma grelha de 4×4 pontos equidistantes:

$$\begin{array}{cccc} g_{12} & g_1 & g_2 & g_3 \\ g_{11} & u_1 & u_2 & g_4 \\ g_{10} & u_3 & u_4 & g_5 \\ g_9 & g_8 & g_7 & g_6 \end{array}$$

(b) Sabendo que a solução de ambos os sistemas é $u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 2, u_4 = 4$, justifique a coincidência dos resultados, relacionando com a solução exacta. Diga, justificando, se continuaria a obter soluções coincidentes para os seguintes dados de Dirichlet em $\partial\Omega$: i) $u(x,y) = x^2(3-y)$, ii) $u(x,y) = x^4(3-y)$.

2. Sendo $\Omega = B(0,1) \subset I\!R^2$, considere em Ω o seguinte problema:

$$\begin{array}{ll} -\text{div}(\beta(x)\nabla u(x)) + u(x) = f(x) & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{array}$$

onde

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in B(0, 0.25); \\ -1, & \text{se } x \in B(0,1) \setminus B(0, 0.25) \end{cases}$$

(a) Escreva a formulação variacional associada ao problema, indicando as formas bilinear, linear e o espaço onde estão definidas. Qual o funcional que se pretende minimizar?

(b) Imponha condições sobre β de forma a garantir que o problema esteja bem posto. Qual a regularidade que garante para u?

(c) Considere a aproximação usando elegentos finitos de Lagrange lineares. Indique como calcular o integral num elemento (i,j) da matriz do sistema discreto, em que as funções de base tenham apenas um triângulo comum E, tal que $F(\bar{E}) = E$, a partir das funções de forma no triângulo de referência $\bar{E}$.

(d) Sabendo que β é um polinómio de grau q, qual o grau da fórmula de quadratura que permite obter valores exactos dos elementos matriciais? Justifique.

(e) Deduza a estimativa de erro para $\|u - u_h\|_{0,\Omega}$ usando elementos finitos de Lagrange lineares. Se usarmos elementos de Lagrange quadráticos podemos garantir a priori a estimativa de erro $\|u - u_h\|_{1,\Omega} = O(h^2)$? Justifique.

3. Sejam a, b, c coeficientes reais não nulos. Considere o sistema de equações diferenciais

$$\partial_t u(t,x) = a\partial_x v(t,x), \qquad \partial_t v(t,x) = b\partial_x w(t,x), \qquad \partial_t w(t,x) = c\partial_x u(t,x).$$

(a) Verifique se é incondicionalmente estável o esquema com diferenças progressivas em ordem a t e diferenças centradas em ordem a x.

(b) Indique um esquema implícito e a matriz de amplificação segundo o critério de Von Neuman.