EXAME DE QUALIFICAÇÃO EM MATEMÁTICA
(ANÁLISE MATEMÁTICA)

27 de Outubro de 2006

Resolva, ainda que parcialmente, 8 dos 10 problemas propostos. Duração: 4 horas

---

1. Responda "Verdadeiro" ou "Falso" em cada uma das alíneas (com justificação no caso "Falso"):

   (a) Se f é uma função contínua de um espaço métrico compacto X num espaço métrico Y, então f é uniformemente contínua.

   (b) Se f é uma função contínua de um espaço métrico X num espaço métrico compacto Y, então a sua imagem $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$ é compacta.

   (c) Sendo $A : X \to Y$, $B : Y \to Z$ operadores de Fredholm em espaços de Banach, então $BA : X \to Z$ é também de Fredholm e

   $$\texttt{ind}\, BA \leq \texttt{ind}\, A + \texttt{ind}\, B.$$

   (d) Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra-C* com unidade e $a \in \mathcal{A}$ normal. Então a é invertível à direita sse a é invertível à esquerda.

   (e) Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa numa região $\Omega \subset \mathbb{C}$ que contém $\overline{B_r(a)} = \{x \in \mathbb{C} : |x - a| \leq r\}$ onde $a \in \mathbb{C}, r > 0$. Então

   $$|f(a)| \leq \sup\{|f(z)| : |z - a| < r\}.$$

   (f) Sendo $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função definida numa região $\Omega \subset \mathbb{C}$ tal que, para qualquer $z \in \Omega$, existe uma sucessão $r_n \to 0$ que satisfaça

   $$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(z + r_n e^{it})\, dt\, ,\ z \in \Omega\, ,\ n = 1, 2, 3, ...,$$

   então $\Delta u = 0$ em Ω .

2. Enuncie o Teorema de Tietze em espaços métricos (ou mesmo em espaços normais) e explique a ideia da sua demonstração.

3. Enuncie o Teorema de Radon-Nikodym num espaço de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ explicitando o significativo dos termos e símbolos utilizados na sua formulação.

4. Dê um exemplo de uma função definida em $\mathbb{R}^2$ que seja integrável à Lebesgue mas não integrável à Riemann e justifique a resposta. Ao contrário: Existem funções integráveis à Riemann (no sentido impróprio) mas não integráveis à Lebesgue?

5. Enuncie a Fórmula Integral de Cauchy para funções com valores num espaço de Banach, explicitando o significativo dos termos e símbolos utilizados na sua formulação.

6. Sejam X, Y espaços de Banach e $A : X \to Y, B : Y \to X$ dois operadores lineares e limitados. Mostre que as composições AB e BA são compactos, se A ou B é compacto. Será que a implicação inversa é também satisfeita?

7. Indique, justificando brevemente, quais dos seguintes espaços de sucessões reais são (a) separáveis, (b) compactos, (c) reflexivos:

$$\begin{aligned} l^1 &= \{(x_n) : \sum |x_n| < +\infty\}, \\ l^\infty &= \{(x_n) : \sup |x_n| < +\infty\}, \\ c_0 &= \{(x_n) : x_n \to 0 \texttt{ se } n \to +\infty\} \ ? \end{aligned}$$

8. Enuncie o Princípio de Reflexão de Schwarz e esboce a sua demonstração.

9. Indique se as seguintes funções são analíticas no ponto $z_0 = 0$ e determine as séries de Taylor, se existirem, no mesmo ponto:

   (a) $f(z) = 1 - \frac{1}{e^{z^2}}$,

   (b) $g(z) = 1 - e^{-1/z^2}$, se $z \neq 0$ e $g(0) = 1$,

   (c) $h(z) = \log(z^2 - 1) = \log |z^2 - 1| + i \arg(z^2 - 1)$,

   onde $\arg \zeta \in [0, 2\pi[$ para $\zeta = z^2 - 1$.

10. Dê um exemplo de uma função meromorfa F tal que:

    (a) F tem única singularidade em $z = 1 + i$, que é um pólo de ordem 2,

    (b) $|F(z)| = 1$ para $|z| = 1$,

    (c) $|F(z)| = \mathcal{O}(z^{-m})$ quando $z \to \infty$ onde m é um dado número inteiro.