EXAME DE QUALIFICAÇÃO EM MATEMÁTICA
(ANÁLISE MATEMÁTICA)
28 de Abril de 2005

Resolva ainda que parcialmente 8 dos 10 problemas propostos. Duração: 4 horas

---

1. Responda "Verdadeiro" ou "Falso" em cada uma das alíneas (com justificação no caso "Falso"):

   (a) Seja f uma aplicação contínua de um espaço métrico num espaço métrico compacto. Então f é uniformemente contínua.

   (b) Se X é um espaço de medida e $f : X \to \mathbb{C}$ mensurável, então $|f|$ é também mensurável.

   (c) Sejam E um espaço de Banach e F um subespaço linear. Então F é fechado sse existe um operador linear limitado $P : E \to E$ tal que
   $$P^2 = P \ , \ \mathrm{im}P = F$$

   (d) Se $T : H \to H$ é um operador autoadjunto e compacto num espaço de Hilbert, então $\lambda = \|T\|$ é valor próprio de T.

   (e) Uma função complexa, limitada e holomorfa em $\mathbb{C}$ é constante.

   (f) Cada bola aberta em $\mathbb{C}$ pode ser transformada conformemente sobre o semiplano $\Re e z > 0$.

2. Enuncie o Teorema de Egoroff sobre a convergência de sucessões de funções mensuráveis explicando o significado dos termos e símbolos utilizados na sua formulação.

3. Dê um exemplo de um conjunto limitado e fechado em l^∞ que não seja sequencialmente compacto e justifique a sua resposta. Será que esse exemplo contém um conjunto não totalmente limitado?

4. Prove a seguinte versão do Teorema Fundamental do Cálculo: Se f é uma função complexa de variável real e integrável no sentido de Lebesgue no intervalo $]a, b[\subset \mathbb{R}$, $a < b$ e $c \in \mathbb{C}$ constantes, então o integral indefinido
   $$g(x) = \int_a^x f(t)dt + c \ , \quad x \in [a, b]$$
   é diferenciável q.t.p. e $g'(x) = f(x)$ é satisfeita q.t.p.

   Sugestão: Considere funções reais, a decomposição em parte positiva e negativa e use a monotonia dos integrais indefinidos daquelas partes.

5. Enuncie o Teorema de Baire e explique o seu papel na Análise Funcional através de uma aplicação (sem demonstração pormenorizada).

6. Dê três exemplos de operadores lineares e limitados $A : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$, $\Omega = [0,1]$, $p \in [1,\infty[$ tais que o espectro de A seja

$$\sigma(A) = \{0\}, \{0,1\} \text{ ou } [0,1],$$

respectivamente.

7. Para $1 \leq p < \infty$ e $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{C}^n$ define-se

$$\|x\|_p = (\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p)^{1/p}$$

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x_j| : 1 \leq j \leq n\}$$

Mostre que todas estas normas são equivalentes. Se $1 \leq p, q \leq \infty$, determine constantes c e C tais que, para cada $x \in \mathbb{C}^n$,

$$c\|x\|_p \leq \|x\|_q \leq C\|x\|_p \ .$$

8. Explique a ideia principal do Cálculo Funcional de Riesz: Convergência de séries de Mac-Laurin com argumento numa álgebra de Banach unital, o Teorema de Cauchy e a Fórmula Integral de Cauchy no cenário correspondente.

9. Enuncie o Teorema do Módulo Máximo para funções holomorfas e dê uma aplicação do mesmo.

10. Determine os valores dos integrais complexos

$$I_1 = \int_\gamma \frac{dz}{z^4+1} \quad , \quad I_2 = \int_\gamma \frac{dz}{(z^2+1)^2}$$

onde γ designa um semi-círculo

$$\gamma = \{z \in \mathbb{C} : \Re ez \in [-R, R]\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \Im mz > 0\}$$

com R > 1.