Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

EXAME DE QUALIFICAÇÃO EM MATEMÁTICA
ÁLGEBRA
6 de Abril de 2005

Duração: 4 horas

Resolva 8 dos 10 problemas propostos. Em cada problema escolhido, mesmo que não consiga uma resposta completa, exponha a solução parcial que obteve.

1. Sejam A um anel comutativo e M um A-módulo livre.

(a) Mostre que se M é finitamente gerado então $M \cong \hom_A(M, A)$.

(b) Mostre que a condição de ser finitamente gerado não pode ser removida.

2. Seja A um anel. Um A-módulo I diz-se *injectivo* se, para toda a sucessão exacta de A-módulos $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$, a sucessão

$$0 \to \hom_A(M_3, I) \to \hom_A(M_2, I) \to \hom(M_1, I) \to 0$$

é exacta. Mostre que, se I é um A-módulo injectivo, então toda a sucessão exacta de A-módulos

$$0 \to I \to M \to M' \to 0$$

se cinde.

3. Seja M um grupo abeliano.

(a) Mostre que se M é finitamente gerado e se, para todo o primo $p \in \mathbb{N}$, se tem $M \otimes \mathbb{Z}_p = \{0\}$, então $M = \{0\}$.

(b) Mostre que a condição de ser finitamente gerado não pode ser removida.

4. Seja G um grupo finito e seja $H \subset G$ um subgrupo próprio. Mostre que

$$G \neq \bigcup_{g \in G} gHg^{-1}.$$

5. Seja G um grupo de ordem p^2q, onde p, q são primos distintos. Mostre que G não é simples.

6. Determine o grau da extensão de decomposição de $f(x) = x^3 + x + 1$ sobre $\mathbb{F}_2$.

7. Seja E/k uma extensão de Galois com subextensões F_1/k, F_2/k tais que F_1/k é uma extensão de Galois, $E = F_1F_2$ e $F_1 \cap F_2 = k$. Sejam $G = \mathrm{Gal}(E/k)$, $H_1 = \mathrm{Gal}(E/F_1)$ e $H_2 = \mathrm{Gal}(E/F_2)$. Mostre que $G \cong H_1 \rtimes H_2$.

8. Seja $E/\mathbb{Q}$ uma extensão de decomposição de x^7-2. Determine geradores e relações para $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$.

9. Seja A um anel comutativo e seja $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ uma sucessão exacta de A-módulos. Mostre que M é Artiniano *sse* M' e M'' o são.

10. Seja A um anel comutativo. Define-se o radical nulo de A, N, como sendo a intersecção de todos os ideais primos de A. Mostre que $N = \{x \in A \mid x \text{ é nilpotente}\}$.