



DECivil
Secção
de Mecânica Estrutural e Estruturas

O PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

I. Cabrita Neves

Fevereiro de 2002

Índice

O PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

	Pág.
1. Trabalho elementar de uma força e de um binário	2
1.1 Trabalho elementar de uma força	2
1.2 Trabalho elementar de um binário	3
2. Expressão de propagação de deslocamentos elementares. Centro instantâneo de rotação de um corpo rígido em movimento plano	5
3. Princípio dos Trabalhos Virtuais	7
4. Aplicações do Princípio dos Trabalhos Virtuais	10
4.1 Sistemas hipoestáticos	10
4.2 Sistemas isostáticos	12
5. Diagrama de deslocamentos	15
6. Trabalho de uma força num deslocamento finito	19
6.1 Trabalho realizado pela força de uma mola de comportamento elástico linear	20
7. Energia potencial	21
8. Energia potencial e equilíbrio	23
9. Estabilidade do equilíbrio	25
10. Determinação de cargas críticas	26

O PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

1. Trabalho elementar de uma força e de um binário

1.1 Trabalho elementar de uma força

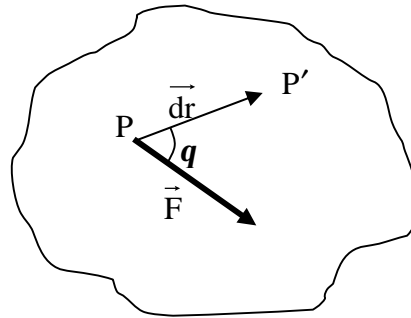


Fig. 1

Seja \vec{F} uma força aplicada a um ponto P de um corpo rígido. Quando P sofre um deslocamento elementar \vec{dr} passando a uma posição vizinha P' a força \vec{F} realiza um trabalho elementar definido pelo escalar

$$dt = \vec{F} \cdot \vec{dr} \quad (1)$$

A partir da expressão (1) é fácil ver que a força \vec{F} não realiza trabalho sempre que:

- 1) o seu ponto de aplicação não se desloque ($\vec{dr} = 0$)
- 2) a força seja perpendicular ao deslocamento do seu ponto de aplicação ($\vec{F} \perp \vec{dr}$).

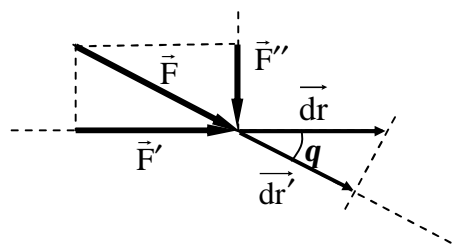


Fig. 2

A expressão (1) pode pôr-se sob a forma

$$dt = F dr \cos q = \vec{F}' \cdot \vec{dr} = \vec{F} \cdot \vec{dr}' \quad (2)$$

ou seja, o trabalho da força \vec{F} no deslocamento elementar \vec{dr} do seu ponto de aplicação:

- 1) é igual ao trabalho realizado pela sua projecção \vec{F}' na direcção do deslocamento

- 2) é igual ao trabalho que ela realizaria no deslocamento elementar \vec{dr}' que é a projecção de \vec{dr} na direcção de \vec{F} .

1.2 Trabalho elementar de um binário

Considere-se um binário constituído por duas forças iguais e opostas de intensidade F aplicadas em dois pontos A e B de um corpo rígido. Quando este sofre um deslocamento elementar, o trabalho realizado pelo binário será a soma dos trabalhos realizados por cada uma das forças que o constituem.

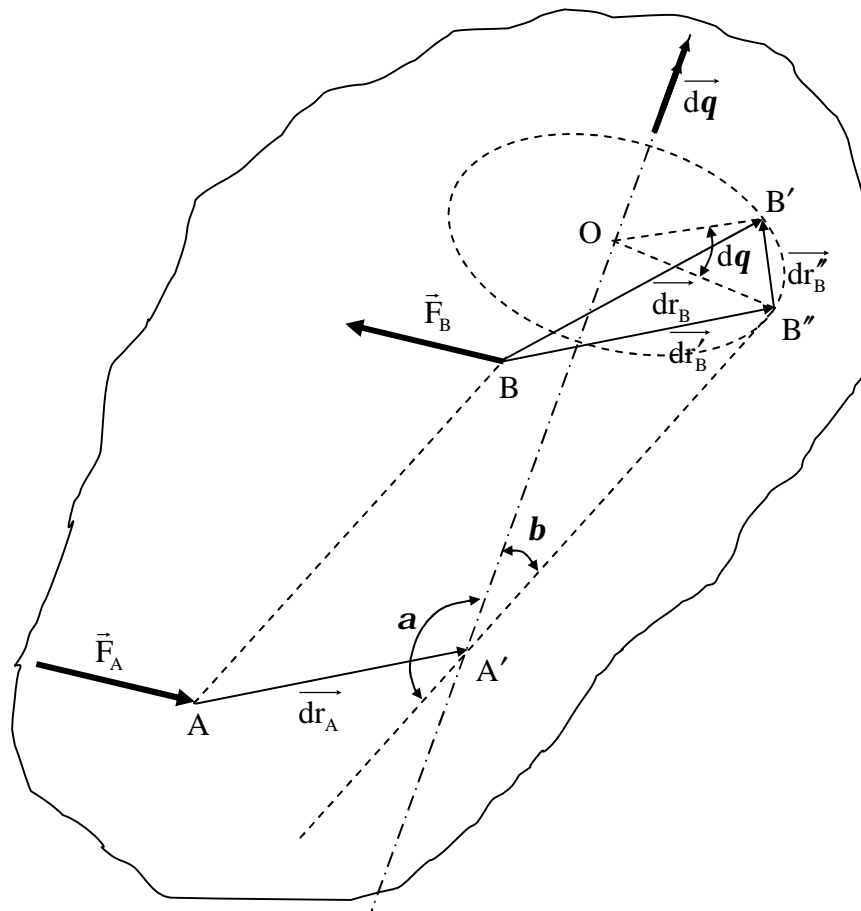


Fig. 3

Considerem-se então as novas posições A' e B' dos pontos A e B do corpo rígido depois deste sofrer um deslocamento elementar. É sempre possível levar o corpo da sua posição inicial à final através dos dois movimentos elementares seguintes:

- 1) movimento elementar de translação com a direcção, sentido e intensidade de \vec{AA}' (o ponto B foi ocupar a posição B'')
- 2) rotação elementar em torno de um eixo que passa por A' de modo a levar o ponto B à sua posição final B' .

Um binário aplicado a um corpo rígido que sofra uma translação elementar não produz trabalho. De facto, se essa translação for representada pelo vector \vec{dr} será

$$\vec{dr}_A = \vec{dr}'_B = \vec{dr} \quad (3)$$

Se forem \vec{F}_A e \vec{F}_B as forças que constituem o binário

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B \quad (4)$$

e o trabalho realizado pelo binário na translação \vec{dr} será

$$d\mathbf{t} = \vec{F}_A \cdot \vec{dr}_A + \vec{F}_B \cdot \vec{dr}'_B = \vec{F}_A \cdot \vec{dr} - \vec{F}_A \cdot \vec{dr} = 0 \quad (5)$$

qualquer que seja \vec{dr} .

Seja \vec{dq} um vector cuja direcção é a do eixo de rotação do corpo rígido, cuja intensidade dq mede em radianos o valor do ângulo elementar de que rodou o corpo rígido e cujo sentido corresponde ao sentido de progressão de um saca-rolhas que gire juntamente com o corpo rígido. Este vector chama-se *vector rotação elementar do corpo rígido*.

Numa rotação elementar do corpo rígido em torno de um eixo que passe por A' (Fig. 3) \vec{F}_A não realiza trabalho e o trabalho do binário resume-se ao trabalho produzido por \vec{F}_B . O ponto B desloca-se sobre a circunferência de centro O (Fig.3).

$$d\mathbf{t} = \vec{F}_B \cdot \vec{dr}''_B \quad (6)$$

$$|\vec{BA} \times \vec{dq}| = |\vec{B''A'} \times \vec{dq}| = |\vec{B''A'}| |\vec{dq}| \sin a = |\vec{B''A'}| |\vec{dq}| \sin b = \overline{OB''} dq \quad (7)$$

Tratando-se de uma rotação elementar, no limite teremos $\overline{OB''} dq = \overline{B''B'}$ e \vec{dr}''_B será tangente à circunferência em B'', ou seja,

$$\vec{dr}''_B = \vec{BA} \times \vec{dq} \quad (8)$$

Finalmente

$$d\mathbf{t} = \vec{F}_B \cdot \vec{BA} \times \vec{dq} = \vec{F}_B \times \vec{BA} \cdot \vec{dq} = \overline{AB} \times \vec{F}_B \cdot \vec{dq} = \vec{M} \cdot \vec{dq} \quad (9)$$

sendo \vec{M} o momento do binário.

A partir da expressão (9) conclui-se imediatamente que um binário aplicado a um corpo rígido não realiza trabalho quando este roda em torno de um eixo perpendicular ao eixo do binário.

2. Expressão de propagação de deslocamentos elementares. Centro instantâneo de rotação de um corpo rígido em movimento plano

Consideremos de novo a Fig. 3

$$\vec{dr}_B = \vec{BB}' = \vec{BB}'' + \vec{B}''\vec{B}' = \vec{AA}' + \vec{B}''\vec{B}' \quad (10)$$

$$\vec{dr}_B = \vec{dr}_A + \vec{BA} \times \vec{dq} \quad (11)$$

À expressão (11) dá-se o nome de *fórmula de propagação de deslocamentos elementares dos pontos de um corpo rígido*. Com base nela, e conhecidos o vector rotação elementar \vec{dq} e o deslocamento de um ponto é possível calcular o deslocamento de qualquer outro ponto do corpo rígido. Esta expressão mostra que o deslocamento \vec{dr}_B de qualquer ponto de um corpo rígido pode ser entendido como o resultado de dois movimentos:

- 1) movimento de translação em que todos os pontos sofrem o mesmo deslocamento que o ponto A, \vec{dr}_A
- 2) movimento de rotação em torno de um eixo que passa por A ($\vec{BA} \times \vec{dq}$)

Esta interpretação está na base do método gráfico apresentado adiante na secção 5. É fácil de ver que o campo de deslocamentos elementares dos pontos de um corpo rígido goza da propriedade projectiva.

$$\vec{dr}_B \cdot \frac{\vec{BA}}{|\vec{BA}|} = \vec{dr}_A \cdot \frac{\vec{BA}}{|\vec{BA}|} \quad (12)$$

Pode pois estabelecer-se um paralelismo entre o campo de momentos resultantes de um sistema de vectores e o campo de deslocamentos elementares dos pontos de um corpo rígido. O vector principal é aqui representado pelo vector rotação elementar \vec{dq} .

À semelhança dos sistemas de vectores teremos aqui 4 tipos de movimentos elementares:

- 1) repouso ($\vec{dq} = \vec{0}$ e $\vec{dr}_p = \vec{0}$; \vec{dr}_p - deslocamento de um ponto qualquer)
- 2) translação elementar ($\vec{dq} = \vec{0}$ e $\vec{dr}_p \neq \vec{0}$)
- 3) rotação elementar ($\vec{dq} \neq \vec{0}$ e $\vec{dr}_p \cdot \vec{dq} = \vec{0}$)
- 4) rotação elementar + translação elementar ou movimento helicoidal elementar ($\vec{dq} \neq \vec{0}$ e $\vec{dr}_p \cdot \vec{dq} \neq \vec{0}$)

Para os dois últimos tipos é possível definir o equivalente ao eixo central, que toma agora a designação de *eixo helicoidal instantâneo*, e que representa o *lugar geométrico dos pontos do corpo rígido de deslocamento mínimo*. No caso da rotação elementar este mínimo assume o valor zero e o eixo toma a designação particular de *eixo instantâneo de rotação*.

Um corpo rígido em movimento plano, isto é, um movimento em que os vários pontos do corpo se deslocam sempre em planos paralelos, será em geral uma rotação elementar em

torno de um eixo perpendicular ao plano do movimento (qualquer dos planos paralelos referidos, em que se faz a projecção de todos os pontos do corpo e onde é possível estudar o seu movimento). A posição do eixo de rotação fica caracterizada definindo a posição do ponto de intersecção com o plano do movimento. Este ponto chama-se *centro instantâneo de rotação*.

Considere-se então um corpo rígido e seja C o seu centro instantâneo de rotação (Fig. 4). Se o corpo sofre uma rotação elementar $d\mathbf{q}$ em torno de C, um ponto A terá um deslocamento elementar $d\mathbf{r}_A$ perpendicular a \overline{CA} de intensidade $dr_A = \overline{CA} d\mathbf{q}$.

Um ponto B terá um deslocamento elementar $d\mathbf{r}_B$ perpendicular a \overline{CB} e de intensidade $dr_B = \overline{CB} d\mathbf{q}$. Analogamente para qualquer outro ponto. A posição do centro instantâneo de rotação de um corpo rígido pode ser facilmente determinada desde que se conheça a direcção de deslocamento de 2 dos seus pontos A e B. Bastará fazer passar por A e por B perpendiculares às direcções de deslocamento respectivas e determinar o ponto de intersecção. Se o movimento for de translação o centro instantâneo de rotação encontrar-se-á no infinito.

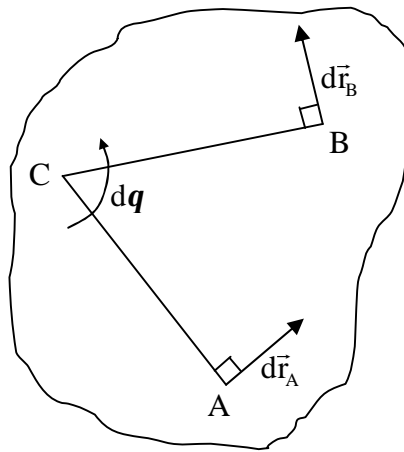


Fig. 4

No caso do movimento plano, as componentes dr_{Ax} e dr_{Ay} do deslocamento de um ponto A qualquer de um corpo rígido que sofre uma rotação $d\mathbf{q}$ em torno do seu centro instantâneo de rotação C, podem ser calculadas de uma forma simples (Fig. 5). Os triângulos da figura são semelhantes, pelo que se terá

$$\frac{dr_{Ay}}{CA_x} = \frac{dr_{Ax}}{CA_y} = \frac{dr_A}{CA} \quad (13)$$

e como

$$dr_A = \overline{CA} d\mathbf{q} \quad (14)$$

obter-se-á

$$dr_{Ax} = \overline{CA}_y d\mathbf{q} \quad (15)$$

$$dr_{Ay} = \overline{CA}_x d\mathbf{q} \quad (16)$$

Portanto, a componente segundo x do deslocamento de um ponto qualquer obter-se-á muito simplesmente multiplicando o ângulo de rotação dq pela projecção segundo y do segmento que une esse ponto ao centro instantâneo de rotação e vice versa.

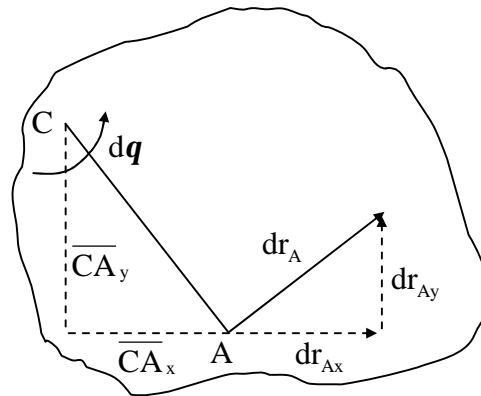


Fig. 5

3. Princípio dos Trabalhos Virtuais

Considere-se uma partícula livre A submetida à acção de n forças, a qual pode ou não encontrar-se em equilíbrio (Fig. 6). Imagine-se que a partícula sofre um deslocamento elementar de A para A' *não necessariamente sob a acção das forças que nela actuam*.

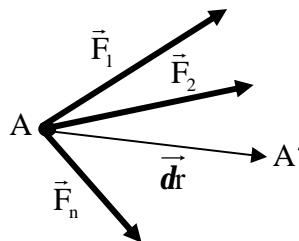


Fig.6

A este deslocamento chama-se *deslocamento virtual* da partícula A e é representado por \vec{dr} para se distinguir do deslocamento real \vec{dr} que se produziria sob a acção das cargas nela actuautes. O trabalho de uma força num deslocamento virtual chama-se *trabalho virtual*. Calculemos o trabalho de todas as forças que actuam na partícula A.

$$dt = \vec{F}_1 \cdot \vec{dr} + \vec{F}_2 \cdot \vec{dr} + \dots + \vec{F}_n \cdot \vec{dr} \quad (17)$$

$$dt = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n) \cdot \vec{dr} = \vec{R} \cdot \vec{dr} \quad (18)$$

O trabalho virtual de todas as forças que actuam na partícula é igual ao trabalho virtual da resultante dessas forças. Podemos pois enunciar o **Princípio dos Trabalhos Virtuais para uma partícula**.

É condição necessária e suficiente para que uma partícula esteja em equilíbrio que seja nulo o trabalho virtual de todas as forças que nela actuam para todo e qualquer deslocamento virtual da partícula.

De facto, se a partícula está em equilíbrio, a resultante \vec{R} das forças que nela actuam é nula e $d\mathbf{t} = 0$.

Inversamente, se for $d\mathbf{t} = 0$ para todo e qualquer deslocamento virtual arbitrário da partícula então $\vec{R} = 0$ e a partícula está em equilíbrio.

O princípio dos trabalhos virtuais pode ser extrapolado imediatamente para qualquer sistema de partículas e em especial para os corpos rígidos que são sistemas de partículas de características especiais. Mas antes convém fazer algumas referências aos tipos de forças que podem actuar nos sistemas de partículas

Forças interiores - uma vez definido com exactidão o sistema em estudo, chamam-se forças interiores às que se exercem entre as suas partes constituintes. São forças de interacção iguais e opostas duas a duas.

Forças exteriores - forças de interacção entre o sistema e o exterior.

Quer umas quer as outras podem ainda classificar-se em:

Forças de ligação - forças de origem geométrica, resultam de restrições ao movimento das várias partes do sistema. (Exemplos: num pêndulo simples a força exercida pelo fio inextensível sobre a partícula oscilante, que a obriga a descrever um arco de circunferência se o movimento for plano; as forças que são exercidas pelos vários tipos de ligações, quer exteriores quer interiores, de uma estrutura e que condicionam o movimento dos pontos de ligação; as forças de atrito estático, por razões análogas).

Forças aplicadas - forças de natureza física, não dependem da geometria do sistema e podem ser determinadas experimentalmente. (Exemplos: forças de atracção gravítica; forças exercidas por molas; forças de atrito cinético).

A chamada *configuração de equilíbrio de um sistema de partículas* fica definida através de um certo número mínimo N de parâmetros independentes designados *coordenadas generalizadas do sistema*. O valor de N define o número de *graus de liberdade do sistema*. Assim, um sistema de n partículas livres terá $3n$ graus de liberdade, correspondentes às suas $3n$ coordenadas cartesianas, mas se entre elas existirem ligações, o número de graus de liberdade já será menor, significando que as $3n$ coordenadas cartesianas não serão independentes. O enunciado do Princípio dos Trabalhos Virtuais para um sistema de partículas assenta na chamada **Condição dos Trabalhos Virtuais**:

O trabalho virtual das forças de ligação de um sistema de partículas, em equilíbrio ou não, é nulo para todo e qualquer deslocamento virtual do sistema compatível com as ligações.

É fácil verificar a condição dos trabalhos virtuais para cada caso particular, em especial para os sistemas de partículas que mais nos interessam neste momento que são os corpos rígidos e os sistemas de corpos rígidos. Assim, o trabalho realizado pela força de ligação

num apoio móvel é sempre nulo, uma vez que a força é sempre perpendicular ao deslocamento que o apoio permite.

Também é sempre nulo o trabalho realizado pelas forças de ligação num apoio fixo, uma vez que o respectivo ponto de aplicação não se desloca. Quanto ao trabalho das forças de ligação interiores entre dois ou mais corpos rígidos, ele será sempre nulo mas por outras razões. Efectivamente essas forças de ligação, se os deslocamentos virtuais forem compatíveis com as ligações, não produzirão trabalho por serem iguais e opostas duas a duas e por terem o mesmo ponto de aplicação. Estão neste caso as forças de ligação entre as várias partículas de um corpo rígido.

Princípio dos Trabalhos Virtuais para um sistema de partículas

Num sistema de partículas em equilíbrio é nulo o trabalho virtual das forças aplicadas ao sistema para todo e qualquer deslocamento virtual compatível com as ligações

Com efeito, se representarmos por \vec{F}_k a resultante das forças que actuam na partícula k de um sistema de n partículas em equilíbrio e se for \vec{dr}_k o deslocamento virtual do seu ponto de aplicação, para cada uma delas ter-se-á

$$\vec{F}_k \cdot \vec{dr}_k = 0 \quad (19)$$

e para o conjunto

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \vec{dr}_k = 0 \quad (20)$$

Uma vez que \vec{F}_k pode incluir forças aplicadas \vec{F}_k^{apl} e forças de ligação \vec{F}_k^{lig} , temos

$$\sum_{k=1}^n (\vec{F}_k^{apl} + \vec{F}_k^{lig}) \cdot \vec{dr}_k = 0 \quad (21)$$

e pela condição dos trabalhos virtuais

$$dt^{apl} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{apl} \cdot \vec{dr}_k = 0 \quad (22)$$

De notar que as forças exercidas por uma mola inserida num sistema de corpos rígidos, embora sendo forças interiores ao sistema, por serem forças aplicadas devem ser consideradas no cálculo da expressão (22). Analogamente, as forças interiores em corpos deformáveis produzirão trabalho virtual diferente de zero e serão consideradas na análise de problemas de equilíbrio pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais.

4. Aplicações do Princípio dos Trabalhos Virtuais

4.1 Sistemas hipoestáticos

Vamos agora considerar algumas aplicações do P.V.T. aos corpos rígidos e a sistemas de corpos rígidos e começaremos por considerar o caso dos sistemas hipoestáticos. Fundamentalmente podem distinguir-se dois tipos de aplicações:

- Determinação da relação ou relações entre as forças aplicadas ao sistema para assegurar uma determinada posição de equilíbrio;
- Determinação da configuração de equilíbrio para um conjunto de forças aplicadas conhecidas.

Problema 1 - Exemplo do 1º tipo de aplicação

Determinar a relação que deverá existir entre as forças P e Q aplicadas ao sistema de duas barras articuladas de igual comprimento L que a Fig. 7 representa, para que este fique em equilíbrio na posição mostrada.

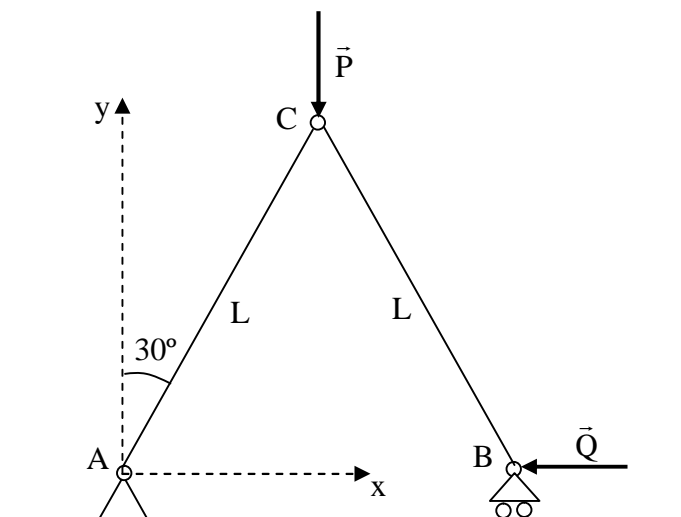


Fig. 7

Resolução

A aplicação do P.T.V. ao caso presente dar-nos-á

$$dt^{apl} = \vec{P} \cdot \vec{dr}_C + \vec{Q} \cdot \vec{dr}_B = 0 \quad (23)$$

$$\vec{P} = -P \vec{e}_2 \quad (24)$$

$$\vec{Q} = -Q \vec{e}_1 \quad (25)$$

Para calcular \overrightarrow{dr}_C e \overrightarrow{dr}_B pode, por exemplo, determinar-se as coordenadas dos pontos B e C no referencial indicado e diferenciá-las em seguida. No entanto, para tal torna-se necessário colocar o sistema numa posição genérica (Fig. 8).

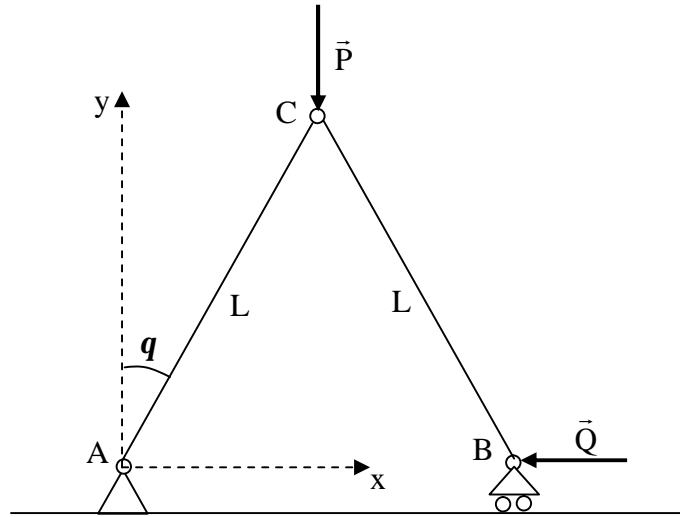


Fig. 8

$$\vec{r}_C = L \operatorname{sen} q \vec{e}_1 + L \cos q \vec{e}_2 \quad (26)$$

$$\vec{r}_B = 2L \operatorname{sen} q \vec{e}_1 \quad (27)$$

$$\overrightarrow{dr}_C = L \cos q dq \vec{e}_1 - L \operatorname{sen} q dq \vec{e}_2 \quad (28)$$

$$\overrightarrow{dr}_B = 2L \cos q dq \vec{e}_1 \quad (29)$$

$$dt^{\text{apl}} = PL \operatorname{sen} q dq - 2QL \cos q dq = 0 \quad (30)$$

$$dt^{\text{apl}} = (PL \operatorname{sen} q - 2QL \cos q) dq = 0 \quad (31)$$

O sistema de corpos rígidos do problema é um sistema com um grau de liberdade, a que corresponderá uma única coordenada generalizada que pode ser representada pelo ângulo q por exemplo. Com efeito, repare-se que a variação das coordenadas dos pontos B e C pôde ser expressa em termos de uma variação dq do ângulo q . Ora o P.T.V. diz-nos que a expressão (31) se anulará sempre, qualquer que seja o deslocamento virtual do sistema compatível com as ligações, ou seja, qualquer que seja dq . Isso implica portanto que no equilíbrio será

$$PL \operatorname{sen} q - 2QL \cos q = 0 \quad (32)$$

Como se pretende que a posição de equilíbrio corresponda a $q = 30^\circ$ teremos finalmente

$$PL \sin 30 - 2QL \cos 30 = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{2Q}{P} = \operatorname{tg}30^\circ \quad (33)$$

Problema 2 - Exemplo do 2º tipo de aplicação

Seja de novo o sistema articulado do problema anterior. Determinar a posição de equilíbrio quando $P=2Q$.

Resolução

A resolução que se fez na aplicação anterior continua válida, nomeadamente a expressão (32) que relaciona os parâmetros P , Q e q no equilíbrio. Ter-se-á então

$$2QL \sin q - 2QL \cos q = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} q = 1 \quad \Rightarrow \quad q = 45^\circ \quad (34)$$

4.2 Sistemas isostáticos

Pode à primeira vista parecer estranho que se queira fazer a aplicação do P.T.V. a sistemas isostáticos, os quais por definição não podem apresentar qualquer tipo de deslocamento compatível com as ligações. No entanto vejamos que, mediante um pequeno artifício, se pode fazer a sua aplicação aos dois casos seguintes:

- Determinação de reacções de apoio
- Determinação de forças de ligação interiores

O P.T.V. diz que, se o sistema está em equilíbrio, é nulo o trabalho virtual das *forças aplicadas ao sistema*. Tudo reside naquilo que se considera o sistema. Para a determinação de reacções de apoio em sistemas isostáticos suprime-se a ligação correspondente à reacção a determinar substituindo-a pela força incógnita respectiva. Ficamos assim com um sistema em equilíbrio, de geometria idêntica ao anterior, mas hipoestático, ao qual portanto já é possível impor deslocamentos virtuais compatíveis com as ligações que ficaram. O equilíbrio não foi alterado, porquanto a reacção incógnita desempenha as funções da ligação suprimida passando a ser considerada como força aplicada.

Problema 3 - Exemplo de determinação de reacções exteriores

Considere a viga Gerber representada na Fig. 9. Por aplicação do P.T.V. determine a reacção no apoio móvel E.

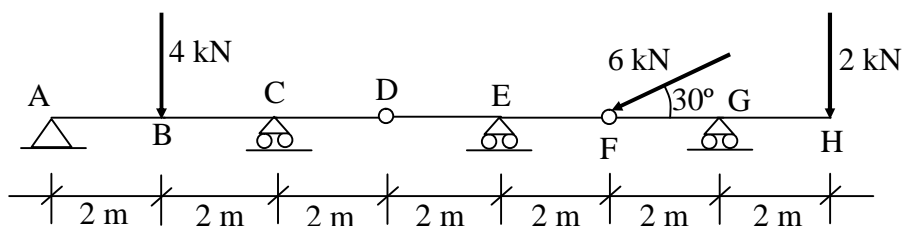


Fig. 9

Resolução

Se suprimirmos o apoio móvel E e colocarmos em E uma força vertical R_E ficamos com um sistema hipoestático do 1º grau. A parte AD da estrutura continua a não poder apresentar deslocamentos. Só as peças DF e FH poderão deslocar-se e o deslocamento de uma implica o deslocamento da outra. Imponhamos então um deslocamento vertical elementar para cima ao ponto F. Teremos então a estrutura na posição representada na Fig.10.

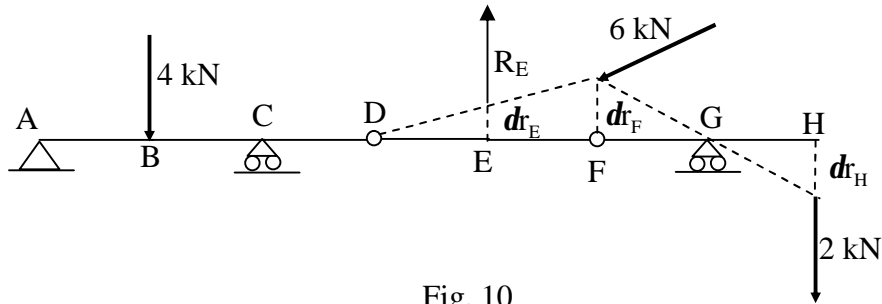


Fig. 10

A aplicação do P.T.V. dará

$$dt^{apl} = R_E dr_E - 6 \operatorname{sen} 30 dr_F + 2 dr_H = 0 \quad (35)$$

Mas os deslocamentos dos pontos E, F e H estão relacionados. Pelo teorema de Thalles

$$\frac{dr_E}{2} = \frac{dr_F}{4} \quad \text{e} \quad \frac{dr_F}{2} = \frac{dr_H}{2} \quad (36)$$

ou seja

$$dr_E = 0,5 dr_F \quad \text{e} \quad dr_H = dr_F \quad (37)$$

e a expressão (35) tomará a forma

$$0,5 R_E dr_F - 3 dr_F + 2 dr_F = 0 \quad (38)$$

ou

$$(0,5 R_E - 3 + 2) dr_F = 0 \quad (39)$$

que deverá ser nula qualquer que seja dr_F , pelo que

$$R_E = 2 \text{ kN} \quad (40)$$

Para a determinação de forças de ligação interiores a técnica é a mesma. Suprime-se a ligação correspondente à incógnita a determinar substituindo-a pelas forças respectivas.

Problema 4 - Exemplo de determinação de forças de ligação interiores

Considere a estrutura representada na Fig. 11. Por aplicação do P.T.V. determine as forças de ligação interiores em B.

Resolução

Em B temos uma ligação rígida a que corresponderão portanto 3 incógnitas: 2 forças iguais e opostas que designaremos por R_{Bx} , 2 forças iguais e opostas R_{By} , e 2 momentos iguais e opostos M_B . Começemos pela determinação de M_B . Para tanto libertemos a rotação em B introduzindo neste ponto uma articulação (Fig.12), e 2 momentos iguais e opostos aplicados à direita e à esquerda de B.

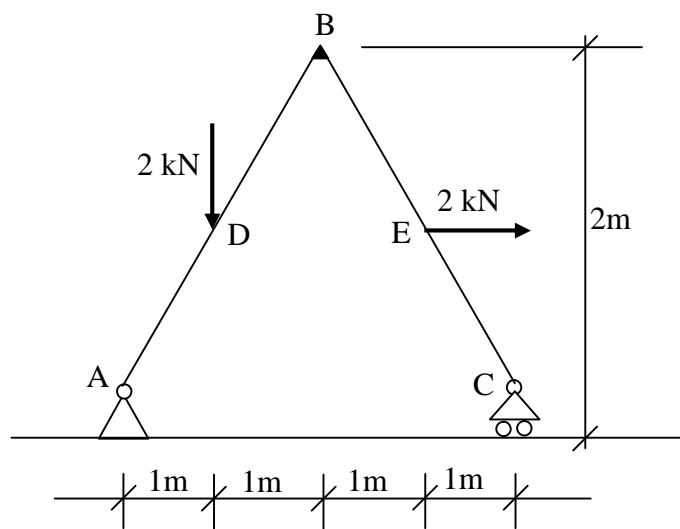


Fig. 11

O sistema ficou hipostático do 1º grau. Vamos impor um deslocamento virtual correspondente a $dq > 0$. Teremos, sucessivamente

$$dt^{apl} = \vec{F}_D \cdot \vec{dr}_D + \vec{F}_E \cdot \vec{dr}_E + 2 \vec{M}_B \cdot \vec{dq} \quad (41)$$

$$dt^{apl} = 2 \times 1 dq + 2 \times 3 dq - 2 M_B dq = 0 \quad (42)$$

$$M_B = 4 \text{ kN.m} \quad (43)$$

Para a determinação de R_{Bx} e R_{By} vamos suprimir a articulação B. O sistema ficará hipostático do 3º grau (Fig. 13). Para manter o equilíbrio do sistema teremos que colocar em B as forças de ligação R_{Bx} , R_{By} e o momento anteriormente determinado.

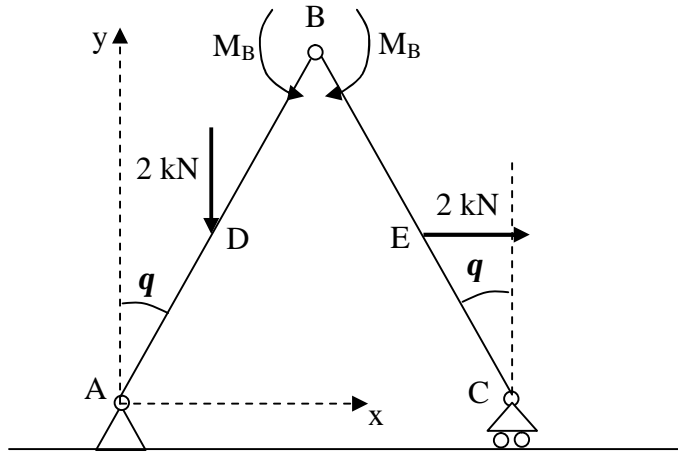


Fig. 12

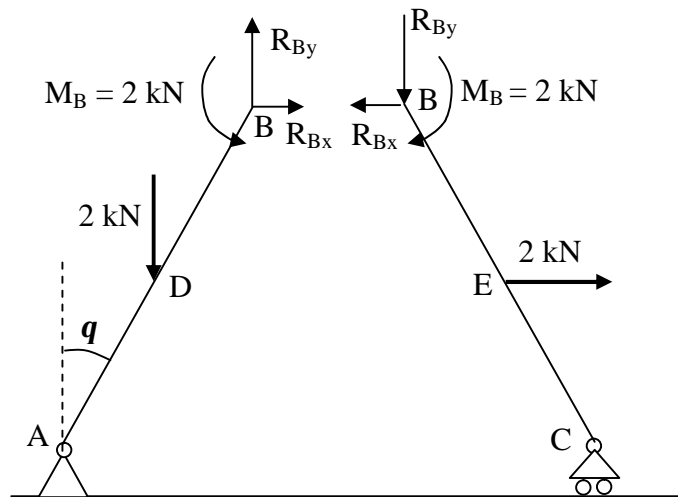


Fig. 13

Impondo uma translação elementar horizontal $d\mathbf{r}$ à barra BC, mantendo a barra AB imóvel, ter-se-á

$$d\mathbf{t}^{\text{apl}} = 2 d\mathbf{r} - R_{Bx} d\mathbf{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{Bx} = 2 \text{ kN} \quad (44)$$

Impondo agora à barra AB uma rotação elementar $d\mathbf{q} > 0$, mantendo a barra BC imóvel, o P.T.V. dar-nos-á

$$d\mathbf{t}^{\text{apl}} = 2 \times 1 d\mathbf{q} + 2 \times 2 d\mathbf{q} - R_{By} \times 2 d\mathbf{q} - 2 d\mathbf{q} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{By} = 2 \text{ kN} \quad (45)$$

5. Diagrama de deslocamentos

Como se viu, a aplicação do P.T.V. à determinação de forças de ligação interiores e exteriores numa estrutura isostática exige a determinação dos deslocamentos de todos os

pontos em que existem forças aplicadas. Esta determinação pode ser feita analiticamente recorrendo à fórmula de propagação de deslocamentos, ou ao conceito de centro instantâneo de rotação se se tratar de uma estrutura plana. Neste último caso esta determinação pode também ser feita graficamente com base no chamado *diagrama de deslocamentos*, que teve grande aplicação no passado antes do advento dos computadores e do cálculo automático. Este diagrama representa, a uma dada escala, todos os vectores deslocamento dos vários pontos da estrutura que têm cargas aplicadas.

Considere-se o movimento plano de um corpo rígido que está articulado com o exterior num ponto C (Fig.14-a). Qualquer deslocamento virtual que se imponha ao corpo, para ser compatível com as ligações só pode ser uma rotação elementar em torno de C. Arbitremos uma rotação virtual em torno de C no sentido dos ponteiros do relógio. O deslocamento do ponto A será representado pelo vector elementar \vec{dr}_A , perpendicular a \overline{CA} e de intensidade $\overline{CA} dq$. Uma vez que o valor de dq é arbitrário pode dizer-se que o módulo de \vec{dr}_A também o é. Assim, representemos o vector \vec{dr}_A num diagrama auxiliar com uma intensidade e sentido arbitrariamente fixados mas tendo o cuidado de respeitar a direcção (Fig.14-b, vector $\overline{OA'}$).

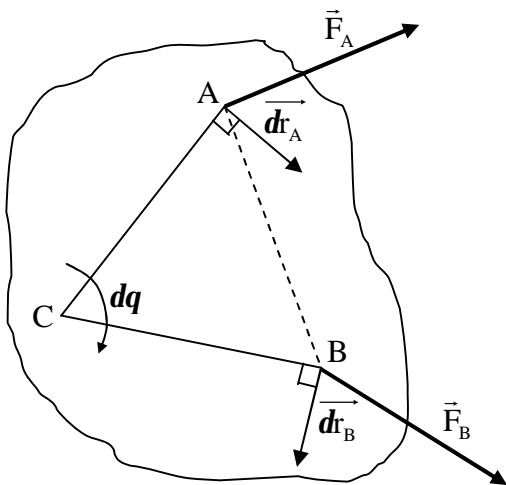


Fig. 14 a)

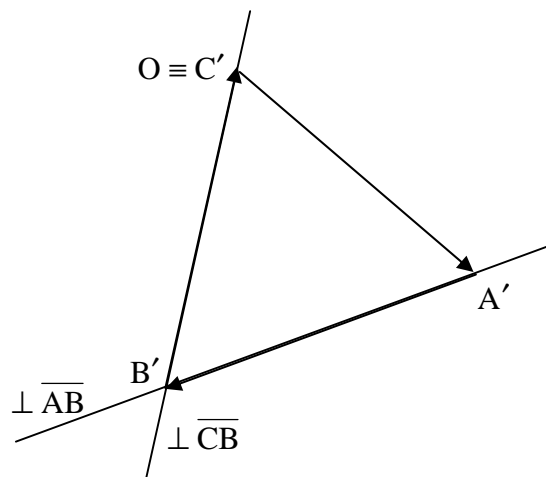


Fig. 14 b)

Uma vez que o corpo rígido só tinha um grau de liberdade, ao fixarmos o deslocamento do ponto A fixámos automaticamente os deslocamentos de todos os seus outros pontos. Se considerarmos outro ponto qualquer B, o seu deslocamento será necessariamente perpendicular a \overline{CB} . Pelo ponto O, origem de todos os vectores deslocamento no diagrama de deslocamentos, fazemos passar uma perpendicular a \overline{CB} .

Por outro lado, como já se viu (Secção 1), o deslocamento de B pode ser encarado como resultante da sobreposição de dois outros deslocamentos elementares:

- 1) translação do corpo rígido \vec{dr}_A mais
- 2) rotação do corpo rígido em torno de A.

Tudo se passa pois como se o vector \overrightarrow{dr}_B tivesse 2 componentes, uma \overrightarrow{dr}_A e outra resultante da rotação do ponto B em torno de A (vector perpendicular a \overline{AB}). Se no diagrama de deslocamentos fizermos passar por A' uma perpendicular a \overline{AB} definiremos não só esta 2ª componente do deslocamento \overrightarrow{dr}_B como o próprio \overrightarrow{dr}_B ($\overline{OB'}$).

Para qualquer outro ponto o processo seria semelhante. O exemplo apresentado foi escolhido propositadamente simples para servir de introdução ao método. No entanto a grande aplicação deste processo gráfico reside nas estruturas isostáticas planas constituídas por vários corpos rígidos articulados entre si.

Problema 5 – Exemplo

Determinar o esforço na barra CD da estrutura articulada representada na Fig.15.

Resolução

Começaremos por suprimir a barra CD substituindo-a por 2 forças iguais e opostas actuando nos nós C e D. Seguidamente vamos impor um deslocamento virtual à estrutura. Para aplicar o P.T.V. necessitaremos conhecer os deslocamentos dos pontos C, D e E para o que utilizaremos o diagrama de deslocamentos (Fig.16).

Antes de mais representaremos a estrutura graficamente a uma dada escala. Poderemos notar desde já que as partes AGEFC e FDBH da estrutura se irão deslocar como corpos rígidos. A parte AGEFC rodará obrigatoriamente em torno de A. Arbitraremos o deslocamento do ponto C (vector $\overline{OC'}$ no diagrama de deslocamentos). A partir deste, todos os outros deslocamentos são determinados graficamente.

O deslocamento de A é nulo, pelo que $A' \equiv O$. O deslocamento do ponto E é determinado a partir dos deslocamentos de A e de C (intersecção da perpendicular a \overline{AE} que passa por A' com a perpendicular a \overline{EC} que passa por C'). O ponto F' é determinado pela intersecção da perpendicular a \overline{AF} que passa por A' com a perpendicular a \overline{EF} que passa por E'. O deslocamento do ponto B tem que ser necessariamente horizontal e por outro lado B' deverá localizar-se sobre a perpendicular a \overline{FB} que passa por F'. Isto permite determinar a posição de B'.

Finalmente o ponto D' estará na intersecção da perpendicular a \overline{DB} que passa por B' com a perpendicular a \overline{FD} que passa por F'. Para calcular os trabalhos realizados pelas forças N_{CD} traça-se a direcção destas passando por O no diagrama de deslocamentos e projectam-se os deslocamentos de C e D sobre esta recta (pontos C'' e D''). Analogamente para a força F_E (ponto E''). For fim a aplicação do P.T.V. fornece-nos

$$dt^{apl} = N_{CD} \times \overline{OC''} - N_{CD} \times \overline{OD''} + F_E \times \overline{OE''} = 0 \quad (46)$$

$$N_{CD} = \frac{F_E \times \overline{OE''}}{\overline{OD''} - \overline{OC''}} \quad (47)$$

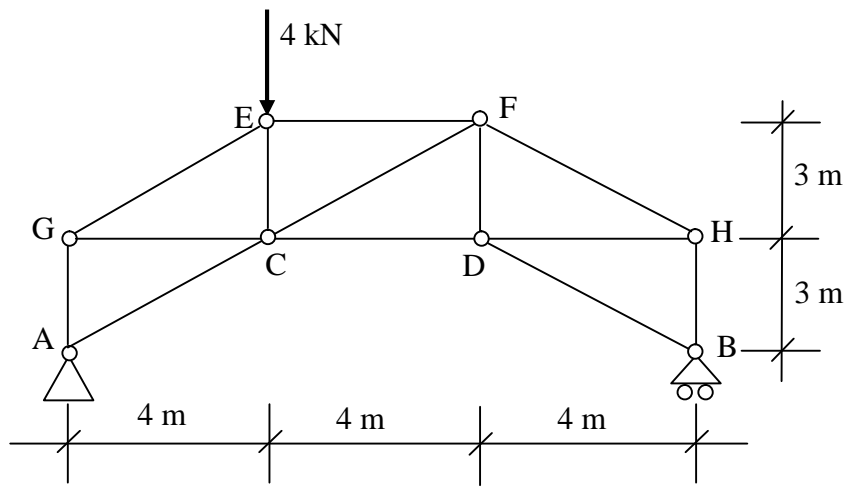


Fig 15

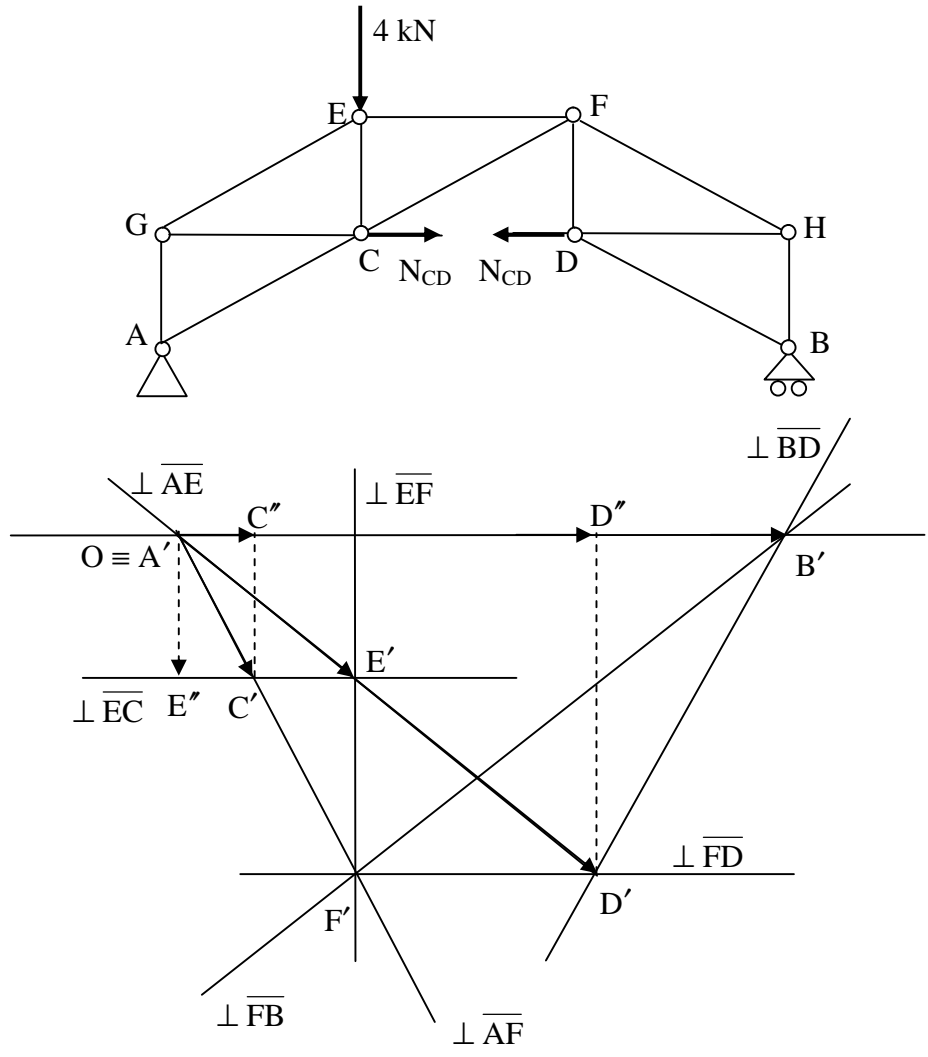


Fig 16

Como já havia sido dito, a Eq. (47) mostra que para a determinação do esforço N_{CD} apenas interessa a relação entre os comprimentos dos segmentos que representam os deslocamentos, e não a escala a que estes foram representados. Como observação final não queremos deixar de chamar a atenção para o facto de que o diagrama de deslocamentos nem sempre pode ser utilizado.

6. Trabalho de uma força num deslocamento finito

Já vimos como se definia trabalho de uma força num deslocamento elementar do seu ponto de aplicação.

$$dt = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (1)$$

Se o ponto de aplicação da força sofrer um deslocamento finito desde a posição A até à posição A' segundo um determinado percurso o trabalho realizado pela força será dado por

$$t_{AA'} = \int_{AA'} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (48)$$

em que o integral é um integral curvilíneo, uma vez que em geral o trabalho da força depende do caminho seguido pelo seu ponto de aplicação. É o caso das forças de atrito.

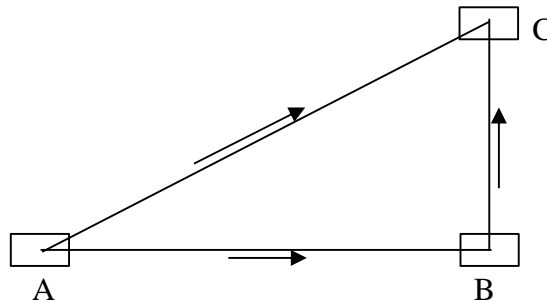


Fig. 17

Considere-se por exemplo um corpo de peso P sobre um plano horizontal. Admitamos que pretendíamos levá-lo da posição A à posição C (Fig.17). Se seguirmos o caminho ABC o trabalho realizado pelas forças de atrito cinético entre o corpo e o plano será

$$t_{ABC} = -\int_{AB} m_c P ds - \int_{BC} m_c P ds = -m_c P (\overline{AB} + \overline{BC}) \quad (49)$$

sendo m_c o coeficiente de atrito cinético entre o corpo e o plano horizontal. Se seguirmos o caminho AC teremos

$$t_{AC} = -\int_{AC} m_c P ds = -m_c P \overline{AC} \neq t_{ABC} \quad (50)$$

6.1 Trabalho realizado pela força de uma mola de comportamento elástico linear

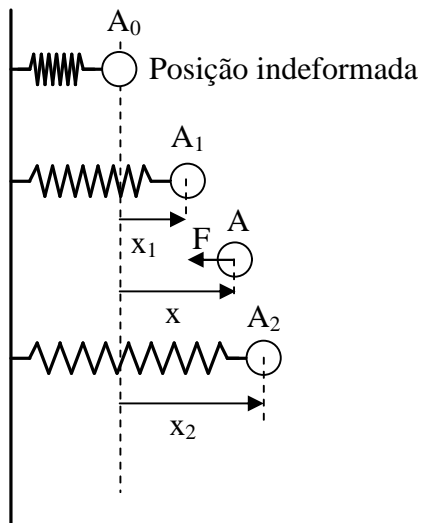


Fig. 18 a)

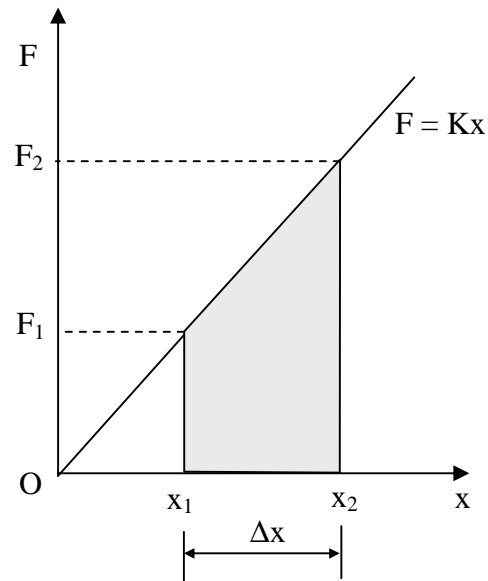


Fig. 18 b)

Uma mola de comportamento elástico linear que se encontra comprimida ou distendida de um comprimento x relativamente à sua posição indeformada exerce sobre qualquer corpo a que esteja ligada (Fig.18-a) uma força de intensidade

$$F = K x \quad (51)$$

em que K é a chamada *constante de rigidez da mola* e representa a força que é necessário aplicar na mola para que o seu comprimento varie de uma unidade.

Se o extremo da mola sofrer um deslocamento elementar $dx > 0$ o trabalho realizado por \vec{F} será

$$dt = -F dx = -Kx dx \quad (52)$$

Se o extremo da mola for da posição A_1 à posição A_2 teremos

$$t_{A_1A_2} = -\int_{x_1}^{x_2} Kx dx = -\left[K \frac{x^2}{2} \right]_{x_1}^{x_2} = -K \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} \quad (53)$$

A expressão (53) é equivalente a (Fig.18-b)

$$t_{A_1A_2} = -\frac{F_1 + F_2}{2} \Delta x \quad (54)$$

que representa o trabalho realizado pela força média exercida pela mola no deslocamento Δx .

7. Energia potencial

Como já referimos, o trabalho realizado por uma força num deslocamento finito do seu ponto de aplicação depende em geral do caminho seguido por este. Há contudo forças para as quais o trabalho que realizam num deslocamento finito só depende das posições inicial e final do seu ponto de aplicação. Tais forças designam-se *conservativas* e para elas é possível definir uma função de ponto chamada *função potencial* V tal que

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \quad (55)$$

ou seja

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (56)$$

É condição necessária e suficiente para que uma força $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ seja uma força conservativa que as derivadas cruzadas sejam iguais, isto é,

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \quad (57)$$

Para este tipo de forças ter-se-á

$$d\mathbf{t} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\frac{\partial V}{\partial x} dx - \frac{\partial V}{\partial y} dy - \frac{\partial V}{\partial z} dz = -dV \quad (58)$$

Como exemplo temos as forças constantes como o peso de um sólido (Fig. 19). Neste caso

$$d\mathbf{t} = -P dy = -dV_p \quad (59)$$

$$V_p = P y + C^{\text{te}} \quad (60)$$

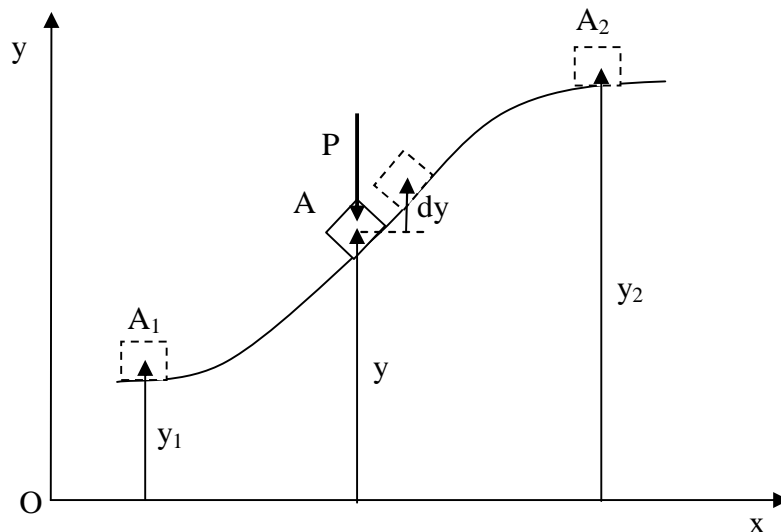


Fig. 19

V_p chama-se *energia potencial gravítica*. Outro caso de força conservativa é o da força exercida por uma mola de comportamento elástico linear (Fig. 18). Ter-se-á

$$d\mathbf{t} = -F dx = -Kx dx = -dV_e \quad (61)$$

$$V_e = K \frac{x^2}{2} + C^{te} \quad (62)$$

V_e chama-se *energia potencial elástica*.

Existe um outro tipo de molas, que designaremos por *molas de torção*, que quando deformadas aplicam aos corpos a que se ligam, não forças mas momentos M , que são proporcionais à rotação relativa q (Fig. 20)

$$M = Kq \quad (63)$$

sendo K a rigidez da mola. Estes momentos têm também carácter conservativo e a eles está igualmente associada uma função potencial elástica

$$V_e = K \frac{q^2}{2} + C^{te} \quad (64)$$

sendo q expresso em radianos.

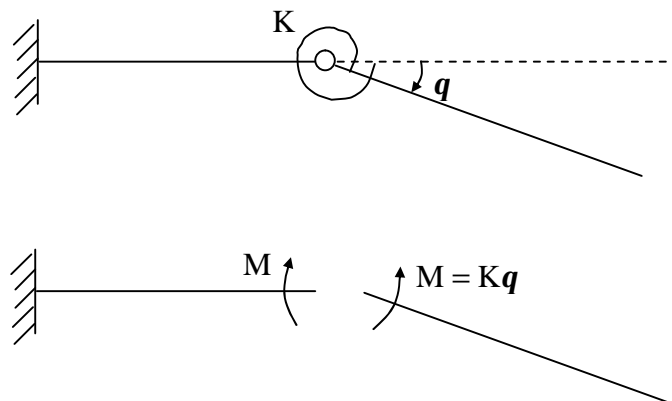


Fig. 20

A expressão (54) pode então escrever-se sob a forma

$$\mathbf{t}_{A_1 A_2} = -(V_{eA_2} - V_{eA_1}) \quad (65)$$

Analogamente, o trabalho realizado por um peso que se desloque de uma posição B a outra C poderá ser obtido por

$$\mathbf{t}_{BC} = -(V_{PC} - V_{PB}) \quad (66)$$

O trabalho realizado por uma força conservativa num deslocamento finito do seu ponto de aplicação é sempre igual a menos a variação da função potencial respectiva entre a posição inicial e a final.

8. Energia potencial e equilíbrio

Vimos que o trabalho virtual de todas as forças aplicadas a um sistema era, por definição

$$d\mathbf{t}^{\text{apl}} = \sum_{k=1}^n (\vec{F}_k^{\text{apl}} \cdot d\vec{r}_k) \quad (67)$$

Esta expressão pode pôr-se na seguinte forma

$$d\mathbf{t}^{\text{apl}} = \sum_{a=1}^N (Q_a \cdot dq_a) \quad (68)$$

em que os q_a são as *coordenadas generalizadas* do sistema e os Q_a são as chamadas *forças generalizadas* associadas às N coordenadas generalizadas q_a .

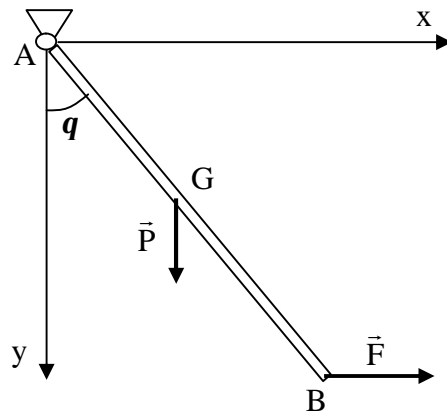


Fig. 21

Tomemos como exemplo o caso de uma barra de comprimento L articulada com o exterior, em equilíbrio plano sob a acção do seu peso e de uma força horizontal \vec{F} , aplicada no seu extremo B (Fig. 21). Trata-se de um caso simples em que o sistema só tem um grau de liberdade representado pela coordenada generalizada q . Calculemos o trabalho virtual das 2 forças aplicadas, numa rotação elementar da barra no sentido dos ponteiros do relógio.

$$d\mathbf{t}^{\text{apl}} = \vec{P} \cdot d\vec{r}_G + \vec{F} \cdot d\vec{r}_B = P dy_G - F dx_B \quad (69)$$

Temos pois o trabalho virtual expresso em termos da variação virtual das coordenadas cartesianas y_G e x_B dos pontos G e B. Podemos contudo escrevê-lo em termos da única coordenada generalizada q .

$$dt^{\text{apl}} = P \frac{L}{2} \sin q \, dq - FL \cos q \, dq = \left(P \frac{L}{2} \sin q - FL \cos q \right) dq \quad (70)$$

A expressão (70) permite identificar a força generalizada Q_q associada à coordenada generalizada q (compare-se com a Eq. (68)).

$$Q_q = P \frac{L}{2} \sin q - FL \cos q \quad (71)$$

Note-se que, embora tenha a designação de força generalizada, nem sempre terá as dimensões de uma força. É o caso presente, em que as dimensões são [FL]. Vimos na secção 7 que, se todas as forças forem conservativas

$$dt^{\text{apl}} = -dV \quad (72)$$

Teremos então, nesse caso, atendendo à expressão (68)

$$-dV = \sum_{a=1}^N Q_a \, dq_a \quad (73)$$

ou seja

$$Q_a = -\frac{\partial V}{\partial q_a} \quad (74)$$

Mas se o sistema está em equilíbrio

$$dt^{\text{apl}} = -dV = \sum_{a=1}^N Q_a \, dq_a = 0 \quad (75)$$

Quer dizer, a função potencial das forças aplicadas a um sistema é estacionária se o sistema estiver em equilíbrio. Uma vez que as coordenadas generalizadas q_a são independentes e a expressão (75) deve anular-se quaisquer que sejam os deslocamentos virtuais, deverá ter-se, para o equilíbrio

$$Q_1 = -\frac{\partial V}{\partial q_1} = 0 \quad (76)$$

$$Q_2 = -\frac{\partial V}{\partial q_2} = 0 \quad (77)$$

$$Q_N = -\frac{\partial V}{\partial q_N} = 0 \quad (78)$$

No equilíbrio, as N forças generalizadas devem pois ser todas nulas.

9. Estabilidade do equilíbrio

Uma determinada configuração de equilíbrio pode corresponder a um *equilíbrio estável*, *instável* ou *indiferente*. Na Fig. 22 apresenta-se um exemplo simples de cada um destes tipos de equilíbrio.

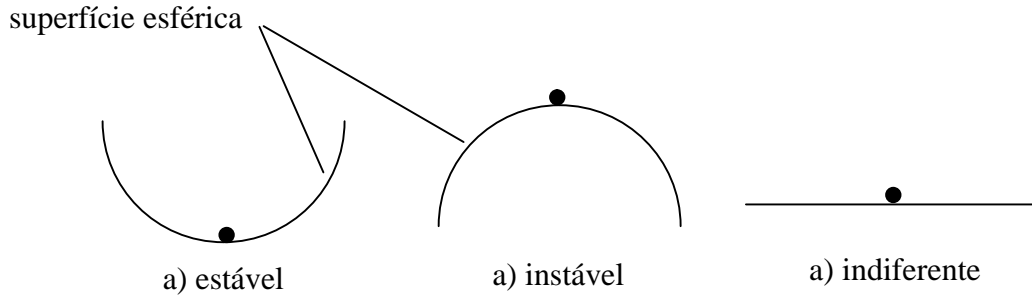


Fig. 22

Neste caso, a única força aplicada ao sistema é o peso da partícula, que é uma força conservativa. A respectiva energia potencial, relativamente às posições vizinhas da posição de equilíbrio, é mínima no caso a), máxima no caso b) e constante no caso c). Se a partícula sofre um deslocamento elementar a partir da sua posição de equilíbrio ela tenderá a regressar ao ponto de partida no caso a) e a afastar-se ainda mais no caso b). No caso c) não apresentará tendência de movimento. De um modo geral podemos dizer que a partícula apresentará sempre tendência para se mover no sentido da força aplicada, ou seja, no sentido dos potenciais decrescentes. Neste caso, de cima para baixo. Qualquer sistema tende sempre a ocupar uma posição em que a sua energia potencial seja mínima.

$$\begin{array}{l}
 V = V(q) \\
 \frac{dV}{dq} = 0 \\
 \downarrow \\
 \text{equilíbrio}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 \frac{d^2V}{dq^2} > 0 \rightarrow V_{\min} \rightarrow \text{equilíbrio estável} \\
 \frac{d^2V}{dq^2} < 0 \rightarrow V_{\max} \rightarrow \text{equilíbrio instável} \\
 \frac{d^2V}{dq^2} = 0 \left\{ \begin{array}{l}
 \frac{d^3V}{dq^3} \neq 0 \text{ inflexão} \rightarrow \text{equilíbrio instável} \\
 \frac{d^3V}{dq^3} = 0 \left\{ \begin{array}{l}
 \frac{d^4V}{dq^4} > 0 \rightarrow \text{estável} \\
 \frac{d^4V}{dq^4} < 0 \rightarrow \text{instável}
 \end{array} \right.
 \end{array} \right.
 \end{array} \right.$$

Quadro I

A análise da estabilidade de uma determinada posição de equilíbrio é feita a partir do estudo dos máximos e mínimos da função potencial do sistema e baseia-se no *Teorema de Lejeune-Dirichlet*:

Num sistema mecânico em equilíbrio a energia potencial V é estacionária e:
mínima - se a posição de equilíbrio é estável
máxima - se a posição de equilíbrio é instável
constante - se a posição de equilíbrio é indiferente

Se se tratar de um sistema a um grau de liberdade, q por exemplo, a análise da estabilidade do equilíbrio far-se-á de acordo com o Quadro I. Resumindo, o equilíbrio será estável se a primeira derivada diferente de zero que se encontrar por positiva e de ordem par. Em todos os outros casos será instável, a menos que seja sempre nula, caso em que será indiferente.

10. Determinação de cargas críticas

Como se acabou de ver, a análise da estabilidade de uma posição de equilíbrio é feita com base nos valores das sucessivas derivadas da função potencial. Esta será em geral função das cargas aplicadas. Pode pôr-se a questão de saber para que valor de uma carga aplicada uma determinada posição de equilíbrio passa de estável a instável. Uma carga nestas circunstâncias denomina-se *carga crítica*.

A determinação de cargas críticas assume particular relevância na Mecânica dos Sólidos deformáveis no estudo de peças lineares comprimidas.

Problema 6 - Exemplo

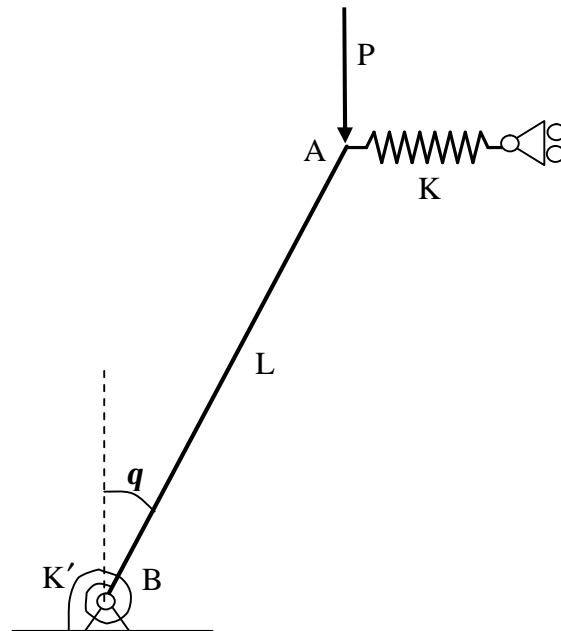


Fig. 23

Considere a barra AB, de comprimento L e articulada em B, representada na Fig. 23. Determine o valor da carga crítica P .

A mola de torção localizada em B possui rigidez K' o que significa que introduz no extremo B da barra um momento

$$M = K' q \quad (79)$$

que é proporcional ao ângulo que a barra forma com a vertical. Supõe-se portanto que quando a barra se encontra na posição vertical ($q=0$) a mola se encontra indeformada. Suporemos ainda que nesta mesma posição a mola localizada em A não aplica força alguma à barra, o que corresponde a dizer-se que noutra posição qualquer ela exercerá em A uma força

$$F = K L \operatorname{sen} q \quad (80)$$

A aplicação do P.T.V. conduz-nos a

$$dt^{\text{apl}} = (\vec{F} + \vec{P}) \cdot \vec{dr}_A + \vec{M} \cdot \vec{dq} = 0 \quad (81)$$

Mas

$$\vec{F} = -KL \operatorname{sen} q \vec{e}_1 \quad \text{e} \quad \vec{P} = -P \vec{e}_2 \quad (82)$$

$$\vec{dr}_A = L \cos q dq \vec{e}_1 - L \operatorname{sen} q dq \vec{e}_2 \quad (83)$$

e então

$$dt^{\text{apl}} = (-KL^2 \operatorname{sen} q \cos q + PL \operatorname{sen} q - K' q) dq = 0 \quad (84)$$

$$Q_q = -KL^2 \operatorname{sen} q \cos q + PL \operatorname{sen} q - K' q = 0 \quad (85)$$

Uma das posições de equilíbrio corresponde a $q = 0$. Analisemos a estabilidade desta posição de equilíbrio.

$$Q_q = -\frac{dV}{dq} \quad (86)$$

$$\frac{d^2V}{dq^2} = KL^2 \cos^2 q - KL^2 \operatorname{sen}^2 q - PL \cos q + K' \quad (87)$$

$$\left(\frac{d^2V}{dq^2} \right)_{q=0} = KL^2 - PL + K' \quad (88)$$

Se a 2ª derivada da função potencial for negativa teremos uma posição de equilíbrio instável. Se pelo contrário for positiva a posição de equilíbrio é estável. A transição de uma situação para a outra far-se-á para valores da carga que tornam nula esta 2ª derivada, ou seja

$$P_{\text{crit}} = KL + \frac{K'}{L} \quad (89)$$