DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Exercícios Resolvidos Extra de Cálculo Diferencial e Integral I
LEIC-T, LEE, LETI, LEGI - CDI-I -, 1.º Semestre 2024/25

Capítulo 6. Sucessões e Séries

Sucessões

1. Determine, se existirem, os limites em $\overline{\mathbb{R}}$ das sucessões que têm por termo de ordem n:

a) $\dfrac{n^n}{1000^n}$,

b) $\dfrac{(2n)!}{n!}$

c) $n^{n+1} - n^n$

d) $3^n - (2n)!$

e) $(n! - n^{1000})^n$

f) $\dfrac{n^{1000}}{1.0001^n}$

g) $\dfrac{5^n - n^4}{3^n + n!}$

h) $\dfrac{n^n - n!}{3^n + n^4 + 2}$.

RESOLUÇÃO:

a) $\dfrac{n^n}{1000^n} = \left(\dfrac{n}{1000}\right)^n$. Como $\lim \dfrac{n}{1000} = +\infty$, temos $\lim \dfrac{n^n}{1000^n} = +\infty$.
Alternativamente, como

$$\lim \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{1000^{n+1}}}{\frac{n^n}{1000^n}} = \lim \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\frac{1000^n}{1000^{n+1}} = \frac{(n+1)}{1000}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = +\infty > 1$$

temos $\lim \frac{n^n}{1000^n} = +\infty$.

b) $\dfrac{(2n)!}{n!} = (n+1)(n+2)\dots(n+n) > n^n$. Como $\lim n^n = +\infty$, então $\lim \dfrac{(2n)!}{n!} = +\infty$.
Alternativamente, como

$$\lim \frac{\frac{(2(n+1))!}{(n+1)!}}{\frac{(2n)!}{n!}} = \lim \frac{(2(n+1))!}{(2n)!}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{(2n+2)(2n+1)}{n+1} = +\infty > 1$$

temos $\lim \frac{(2n)!}{n!} = +\infty$.

c) $\lim n^{n+1} - n^n = \lim n^n(n-1) = +\infty$.

d) $\lim 3^n - (2n)! = \lim (2n)!\left(\frac{3^n}{(2n)!} - 1\right) = -\infty$, ja que pela escala de sucessoes $a^n << n!$ para qualquer $a > 1$, e $n! << (2n)!$.

e) $\lim(n! - n^{1000})^n = \lim \left(\frac{n!}{n^{1000}} - 1\right)^n n^{1000n} = +\infty$.

f) Como, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e $c > 1$, $\lim \frac{n^\alpha}{c^n} = 0$, tem-se $\lim \frac{n^{1000}}{1.0001^n} = 0$.

g) $\lim \dfrac{5^n - n^4}{3^n + n!} = \lim \dfrac{5^n(1 - n^4/5^n)}{n!(3^n/n! + 1)} = \lim \dfrac{5^n}{n!} = 0$, já que pela escala de sucessões $a^n << n!$ e $n^p << a^n$, $a > 1$, $p \in \mathbb{N}$.

h) $\lim \dfrac{n^n - n!}{3^n + n^4 + 2} = \lim \dfrac{n^n(1 - n!/n^n)}{3^n(1 + n^4/3^n + 2/3^n)} = +\infty$, já que $n! << n^n$, $3^n << n^n$ e $n^4 << 3^n$.

2. Considere as sucessões definidas da seguinte forma, com $a, r \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} u_1 = a, \\ u_{n+1} = r + u_n, \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1 = a, \\ v_{n+1} = rv_n. \end{cases}$$

(A sucessão (u_n) é uma *progressão aritmética* de primeiro termo a e razão r e a sucessão (v_n) é uma *progressão geométrica* de primeiro termo a e razão r.)

a) Mostre por indução matemática que $u_n = a + (n-1)r$ e $v_n = ar^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

b) Dê exemplos de valores de r e de a tais que

(i) (u_n) seja monótona crescente;

(ii) (u_n) seja monótona decrescente;

(iii) (v_n) seja monótona crescente; (iv) (v_n) não seja monótona.

c) Mostre que (u_n) não é limitada, para quaisquer $a \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$. Para que valores de r e a será (v_n) limitada? E convergente?

RESOLUÇÃO

Sejam $a, r \in \mathbb{R}$, e (u_n), (v_n) sucessões tais que $u_1 = a$, $u_{n+1} = r + u_n$ e $v_1 = a$, $v_{n+1} = rv_n$.

a) Mostrar que $u_n = a + (n-1)r$ e $v_n = ar^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$:
Vamos considerar só a progressão aritmética (u_n):

- $n = 1$: $u_1 = a = a + (1-1)r$.
- Hipótese de indução: $u_n = a + (n-1)r$, para certo $n \in \mathbb{N}$. Queremos ver que $u_{n+1} = a + nr$. Então, por hipótese,

$$u_{n+1} = r + u_n = r + a + (n-1)r = a + nr.$$

b) (i) (u_n) monótona crescente: em geral, $u_{n+1} - u_n = r$, logo (u_n) será monótona crescente sse $r \geq 0$, com a qualquer (se $r = 0$, (u_n) é a sucessão constante igual a a). Por exemplo, $u_1 = 1$, $u_{n+1} = 3 + u_n$.

(ii) (u_n) monótona decrescente: $r \leq 0$, a qualquer. Por exemplo, $u_1 = 1$, $u_{n+1} = -3 + u_n$.

(iii) (v_n) monótona crescente: em geral, $v_{n+1} - v_n = ar^n - ar^{n-1} = ar^{n-1}(r-1)$. Logo, (v_n) será monótona crescente sse $a \geq 0 \wedge r \geq 1$ ou $a \leq 0 \wedge 0 \leq r \leq 1$ (se $r < 0$, r^{n-1} muda de sinal, e (v_n) não é monótona). Por exemplo, $v_1 = 2$, $v_{n+1} = 3v_n$, $v_1 = -2$, $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$,

(iv) (v_n) não seja monótona: de (iii), (v_n) não é monótona sse $r < 0$ (a qualquer). Por exemplo, $v_1 = 2$, $v_{n+1} = -3v_n$.

c) (u_n) não é limitada: temos, por a), $u_n = a + (n-1)r$, logo dado $b \in \mathbb{R}$ qualquer, para $r > 0$,

$$u_n > b \Leftrightarrow n > \frac{b-a}{r} + 1$$

e portanto (u_n) não é majorada. Se $r < 0$, (u_n) não será minorada.

Quanto a (v_n), de a), $v_n = ar^{n-1}$, logo (v_n) será limitada/convergente sse r^{n-1} for limitada/convergente, ou seja, será limitada para $-1 \leq r \leq 1$, convergente para $-1 < r \leq 1$, a qualquer.

3. Sendo x_n o termo geral de uma sucessão monótona, y_n o termo geral de uma sucessão limitada e supondo verificada a condição

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |x_n - y_n| < \frac{1}{n}$$

prove que x_n é limitada e que as duas sucessões são convergentes para o mesmo limite.

RESOLUÇÃO:

De $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, temos que $y_n - \frac{1}{n} < x_n < y_n + \frac{1}{n} \Rightarrow y_n - 1 < x_n < y_n + 1 \Rightarrow a - 1 < x_n < b + 1$, em que $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $a < y_n < b$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Logo (x_n) é limitada. Como é monótona, será convergente.

De $x_n - \frac{1}{n} < y_n < x_n + \frac{1}{n}$, e $\lim(x_n + \frac{1}{n}) = \lim(x_n - \frac{1}{n}) = \lim x_n$, conclui-se, do critério das sucessões enquadradas, que (y_n) é convergente e $\lim y_n = \lim x_n$.

4. Sejam A e B os conjuntos $A = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $B = \left\{-\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$. Diga, justificando, quais das seguintes proposições são verdadeiras. Para as que forem falsas forneça um contra-exemplo:

a) Toda a sucessão de termos em A que seja limitada é convergente.

b) Qualquer sucessão monótona de termos em $A \cap V_{1/2}(0)$ tem limite real.

c) Qualquer sucessão de termos em $A \cup B$ que seja estritamente decrescente tem limite em $\mathbb{R}_0^+$.

RESOLUÇÃO:

a) Falso: por exemplo, $u_n = 3+(-1)^n$, é limitada, tem termos em A e não é convergente, uma vez que tem dois sublimites diferentes: 2 e 4.

b) Verdadeiro: se (u_n) é monótona e tem termos em $A \cap V_{1/2}(0)$, será monótona e limitada, logo convergente em $\mathbb{R}$.

c) Verdadeiro: se (u_n) é uma sucessão de termos em $A \cup B$ com $\lim u_n = a < 0$ então $u_n < \frac{a}{2}$ a partir de certa ordem. Em particular, $u_n \in B$ e o conjunto $B \cap \{x : x < \frac{a}{2}\}$ é finito. Logo (u_n) não poderia ser estritamente decrescente.

5. Seja $u_1 > 1$ e $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}$ para $n \in \mathbb{N}_1$. Mostre que u_n é convergente e calcule $\lim u_n$.

(Sugestão: começe por provar por indução matemática que $1 < u_n < 2$, para todo o inteiro $n \geq 2$.)

RESOLUÇÃO:

Notemos que, se $x > 1$, então $0 < \frac{1}{x} < 1$ e, portanto $1 < 2 - \frac{1}{x} < 2$. Como $u_1 > 1$, concluimos que $1 < u_2 < 2$. Por outro lado, se, como hipótese de indução, considerarmos $1 < u_n < 2$, então, usando o mesmo argumento concluimos que $1 < u_{n+1} < 2$. Provamos assim que $\forall n \geq 2\,,\ 1 < u_n < 2$, e que, portanto, a sucessão é limitada.

Como $u_{n+1} - u_n = 2 - \frac{1}{u_n} - u_n = -\frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{u_n} = -\frac{(u_n-1)^2}{u_n} < 0$, dado que, como vimos $u_n > 1$, concluimos que u_n é decrescente. Logo a sucessão é monótona e limitada e, portanto, convergente.

Seja $l = \lim u_n$. Então, dado que $\lim u_{n+1} = \lim u_n$, temos

$$\lim u_{n+1} = \lim \left(2 - \frac{1}{u_n}\right) \quad \Leftrightarrow \quad l = 2 - \frac{1}{l} \quad \Leftrightarrow \quad l = 1.$$

6. Seja (u_n) a sucessão definida por recorrência por $u_1 = 1$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

   a) Prove por indução que $1 \leq u_n < 2$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

   b) Prove por indução que (u_n) é crescente.
   (Alternativamente, verifique que $u_{n+1} - u_n = \frac{(2-u_n)(u_n+1)}{u_n + \sqrt{2+u_n}}$.)

   c) Justifique que (u_n) é convergente.

   d) Aplicando limites a ambos os membros da expressão de recorrência, determine o limite de (u_n).

RESOLUÇÃO:

a) $1 \leq u_n < 2$, para $n \in \mathbb{N}$:
   - $n = 1$: $u_1 = 1$, logo $1 \leq u_1 < 2$ é uma proposição verdadeira.
   - Hipótese de indução: $1 \leq u_n < 2$, para certo $n \in \mathbb{N}$. Queremos ver que também $1 \leq u_{n+1} < 2$. Como $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$, usando a hipótese de indução temos $\sqrt{2+1} \leq u_{n+1} < \sqrt{2+2} \Leftrightarrow \sqrt{3} \leq u_{n+1} < 2 \Rightarrow 1 \leq u_{n+1} < 2$.

b) (u_n) é crescente: vamos usar indução matemática para mostrar que $u_{n+1} \geq u_n$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.
   - $n = 1$: $u_1 = 1$, $u_2 = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$, logo $u_2 > u_1$ é uma proposição verdadeira.
   - Hipótese de indução: $u_{n+1} \geq u_n$, para certo $n \in \mathbb{N}$. Queremos ver que também $u_{n+2} \geq u_{n+1}$. Temos $u_{n+2} = \sqrt{2 + u_{n+1}}$, e, de $u_{n+1} \geq u_n$, vem que $\sqrt{2 + u_{n+1}} \geq \sqrt{2 + u_n}$, ou seja, que $u_{n+2} \geq u_{n+1}$, como queriamos mostrar.

c) (u_n) é monótona crescente e limitada, logo convergente.

d) Seja $l = \lim u_n$. Então, dado que $\lim u_{n+1} = \lim u_n$, temos

$$\lim u_{n+1} = \lim \sqrt{2 + u_n} \Leftrightarrow l = \sqrt{2 + l} \Leftrightarrow l^2 = 2 + l \ \wedge\ l \geq 0 \Leftrightarrow l = 2.$$

Séries Numéricas

1. Determine a natureza das seguintes séries, usando critérios de convergência apropriados:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^3+n^2+1}}$, b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n^2+n!}$, c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-4}{n^4-1}$,

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!}$, e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{1-2^n}$, f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+\sqrt{n}}\right)^n$,

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^{n+1}}{1+3^n}$, h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2}$, i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^3}$,

j) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{n^6-1}}$, k) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n\sqrt{n}+1}$, l) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1000)^n}{n!}$,

m) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-2^n}{n^2-3^n}$, n) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$, o) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2-1}$,

p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{sen}\frac{1}{n}$, q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{n^2}$, r) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

RESOLUÇÃO

NOTA: uma série de termos não negativos converge se e só se converge absolutamente (já que $a_n = |a_n|$).

a) Trata-se de uma série de termos não negativos. Comparemos com a série $\sum \frac{n}{\sqrt{n^3}} = \sum \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ a qual é divergente. Como,

$$\lim \frac{\frac{n+1}{\sqrt{n^3+n^2+1}}}{\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}} = 1 \ \neq 0, +\infty, \qquad \text{(verifique)}$$

concluimos que a série dada e a série $\sum \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ têm a mesma natureza. Logo a série dada é divergente, já que é uma série de Dirichlet da forma $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ com $\alpha = 1/2 < 1$.

b) Trata-se de uma série de termos não negativos. Usando o critério de d'Alembert,

$$\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2+(n+1)!}}{\frac{2^n}{n^2+n!}} = \frac{2(n^2+n!)}{(n+1)^2+(n+1)!} = 2\frac{n!}{(n+1)!}\frac{\frac{n^2}{n!}+1}{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}+1} \to 2\cdot 0\cdot 1 = 0.$$

Como este limite é menor que 1, concluimos que a série dada é (absolutamente) convergente.

c) Procedendo como em a) concluimos que a série tem a mesma natureza que a série $\sum \frac{1}{n^3}$. Logo, é (absolutamente) convergente.

d) Trata-se de uma série de termos não negativos. Aplicando o critério de d'Alembert,

$$\frac{\frac{2^{n+1}}{(2(n+1))!}}{\frac{2^n}{(2n)!}} = \frac{2^{n+1}}{2^n}\,\frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \frac{2}{(2n+1)(2n+2)} \to 0$$

Como este limite é inferior a 1 concluimos que a série é (absolutamente) convergente.

e) Como $\frac{1+2^n}{1-2^n} = \frac{2^{-n}+1}{2^{-n}-1} \to -1 \neq 0$, concluimos que a série é divergente.

f) Trata-se de uma série de termos não negativos. Tentemos aplicar o critério da raiz (ou de Cauchy):

$$\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+\sqrt{n}}\right)^n} = \frac{n}{2n+\sqrt{n}} = \frac{1}{2+n^{-\frac{1}{2}}} \to \frac{1}{2}.$$

Como este limite é inferior a 1 concluimos que a série é (absolutamente) convergente.

g) (Comece por reparar que, contrariamente a e), a sucessão do termo geral desta série converge para 0 o que não nos permite tirar qualquer conclusão sobre a convergência ou divergência da série.)

Tratando-se de uma série de termos não negativos, podemos tentar usar o critério de d'Alembert:

$$\frac{\frac{1+2^{n+2}}{1+3^{n+1}}}{\frac{1+2^{n+1}}{1+3^n}} = \frac{1+2^{n+2}}{1+2^{n+1}}\,\frac{1+3^n}{1+3^{n+1}} = \frac{2^{-(n+1)}+2}{2^{-(n+1)}+1}\,\frac{3^{-n}+1}{3^{-n}+3} \to \frac{2}{3}.$$

Como este limite é inferior a 1 a série é (absolutamente) convergente.

(Alternativamente: usar o critério geral de comparação com $\sum \left(\frac{2}{3}\right)^n$.)

h) Trata-se de uma série de termos não negativos. Tentemos aplicar o critério de Cauchy:

$$\sqrt[n]{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2}} = \left(1+\frac{2}{n}\right)^n \to e^2.$$

Como este limite é superior a 1 concluimos que a série é divergente.

i) Como em h), neste caso a série converge.

j) Como em a) concluimos que a série tem a mesma natureza que a série $\sum \frac{1}{n}$. Logo, é divergente.

k) Como em a) concluimos que a série tem a mesma natureza que a série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$. Logo, é divergente.

l) Trata-se de uma série de termos não negativos. Aplicando o critério de d'Alembert,

$$\lim \frac{\frac{(1000)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(1000)^n}{n!}} = \lim 1000\,\frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{1000}{n+1} = 0.$$

Como este limite é inferior a 1, a série é (absolutamente) convergente.

m) Repare-se que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-2^n}{n^2-3^n}$ é uma série de termos não negativos, já que $n < 2^n$ e $n^2 < 3^n$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ (por indução)[1],

Aplicando o critério de d'Alembert,

$$\lim \frac{\frac{n+1-2^{n+1}}{(n+1)^2-3^{n+1}}}{\frac{n-2^n}{n^2-3^n}} = \frac{2}{3} < 1$$

(verifique), logo a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-2^n}{n^2-3^n}$ converge (absolutamente) .

n) Trata-se de uma série de termos não negativos. Tentemos aplicar o critério de Cauchy:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \frac{1}{\ln n} \to 0 < 1.$$

Logo, a série é (absolutamente) convergente.

o) Trata-se de uma série de termos não negativos. Comparando com a série convergente $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$:

$$\frac{\frac{\arctan n}{n^2-1}}{\frac{1}{n^2}} = \arctan n \, \frac{n^2}{n^2-1} \to \frac{\pi}{2} \neq 0, \infty.$$

Logo, as séries têm a mesma natureza, ou seja, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2-1}$ é (absolutamente) convergente.

p) Temos

$$\lim n \operatorname{sen} \frac{1}{n} = \lim \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Como o termo geral não converge para 0, a série diverge.

q) Trata-se de uma série de termos não negativos. Comparando com a série convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$:

$$\lim \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \neq 0, \infty.$$

Do critério geral de comparação, as séries têm a mesma natureza, ou seja, convergem (absolutamente).

r) Trata-se de uma série de termos não negativos. Comparando com a série divergente $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$

$$\frac{\frac{1}{\ln n}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{\ln n} \to +\infty.$$

Logo, $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$, a partir de determinada ordem, e do critério geral de comparação, a série diverge.

2. a) Justifique que se f é uma função real tal que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = L \in \mathbb{R}^+,$$

então, para qualquer sucessão $a_n \geq 0$ com $a_n \to 0$, as séries $\sum a_n$ e $\sum f(a_n)$ têm a mesma natureza.

b) Determine a natureza das séries seguintes, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{n^\alpha}} - 1\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

RESOLUÇÃO

a) Para $a_n \geq 0$, as séries $\sum a_n$ e $\sum f(a_n)$ são de termos não negativos, já que se $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = L > 0$, então $f(x) > 0$ em $]0, a[$ para algum $a > 0$, logo $f(a_n) > 0$. Como $a_n \to 0^+$, tem-se

$$\lim \frac{f(a_n)}{a_n} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = L > 0.$$

Como $L \neq 0, +\infty$, segue do critério geral de comparação que $\sum a_n$ e $\sum f(a_n)$ têm a mesma natureza.

b) Segue directamente de a), notando que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1$$

que as séries dadas convergem se e só se $\alpha > 1$, por comparação com as séries de Dirichlet $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.

3. Determine se são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes, as seguintes séries alternadas:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1+n}{n}\right)$,

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^3+2}$,

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^{3000}}{3^n}$,

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$,

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$,

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$,

RESOLUÇÃO

a) O termo geral da série é uma sucessão divergente já que possui dois sublimites diferentes: 1 e -1. Logo, como o termo geral da série não tende para 0 concluimos que a série é divergente.

b) NOTA: Comece por observar que, contrariamente ao caso anterior, a sucessão do termo geral da série converge para 0 o que não nos permite tirar nenhuma conclusão sobre a convergência da série. Observe igualmente que não se trata de uma série de termos não negativos pelo que os critérios anteriormente usados para esse tipo de séries (comparação, d'Alembert, Cauchy) não podem ser directamente aplicados aqui.

Estudemos a série de módulos correspondente. Como

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n n}{n^3+2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+2},$$

por comparação desta série de termos positivos com a série convergente $\sum \frac{1}{n^2}$ concluimos que esta série é convergente e, portanto a série dada é absolutamente convergente.

c) Esta série é absolutamente convergente, uma vez que a série dos módulos é dada por $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{3000}}{3^n}$, que é convergente (usando o Critério de d'Alembert: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{1}{3} < 1$).

d) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$. Consideremos a série de termos positivos $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\right| = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$, e comparêmo-la com a série divergente $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$:

$$\frac{\frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}+1} \to \frac{1}{2} \neq 0, +\infty$$

logo a série de módulos considerada é também divergente. Concluímos que a série dada não pode ser absolutamente convergente.

Tratando-se de uma série alternada tentemos usar o critério de Leibniz: considere-se a série dada na forma $\sum(-1)^n a_n$ com $a_n = \frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} > 0$. Como

$$a_{n+1} - a_n = \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+2}}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} < 0$$

o que mostra que a sucessão de termo geral a_n é decrescente, e como $a_n \to 0$, podemos concluir, pelo critério de Leibniz, que a série é convergente.

Logo, a série é simplesmente convergente.

Uma observação: o critério de Leibniz só decide da convergência de uma série, nada dizendo sobre a convergência ser simples ou absoluta. O resultado anterior foi obtido depois de termos verificado previamente que a convergência não poderia ser absoluta.

e) É uma série alternada. Considerando a série dos módulos correspondente $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$, vemos que será divergente, uma vez que

$$\lim \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$$

e portanto a série dos módulos tem a mesma natureza que a série harmónica. Concluimos que a série dada não pode ser absolutamente convergente. Escrevendo a série dada na forma $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, com $a_n = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$, temos que $a_n \to 0$ e a_n é decrescente, uma vez que a função $\operatorname{sen} x$ é crescente para $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e $\frac{1}{n}$ é decrescente. Do critério de Leibniz, a série dada converge. Logo, a série é simplesmente convergente.

f) É uma série alternada. A série dos módulos é dada por $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, que é divergente (uma vez que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ converge sse $\alpha > 1$). Concluimos que a série dada não é absolutamente convergente. Escrevendo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, com $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, temos que $a_n \to 0$, $a_n > 0$ e

$$a_n - a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}} > 0$$

ou seja, (a_n) é decrescente. Assim, pelo critério de Leibniz, a série é convergente. Logo, a série é simplesmente convergente.

Séries de potências e séries de Taylor

4. Determine para que valores de $x \in \mathbb{R}$ as seguinte séries de potências convergem absolutamente, convergem simplesmente ou divergem:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$,

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}, \frac{(x+2)^n}{(n+2)2^n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^n}{2n}$,

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(nx)^n}{(n+1)^n}$,

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!(x-1)^n}{n!+1}$,

RESOLUÇÃO

a) Temos $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n$ é uma série geométrica de razão $\frac{x}{2}$. Logo, converge absolutamente para $\left|\frac{x}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$ e diverge para $\left|\frac{x}{2}\right| \geq 1 \Leftrightarrow x \leq -2 \wedge x \geq 2$.

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}, \frac{(x+2)^n}{(n+2)2^n}$ é uma série de potências, centrada em -2, cujo raio de convergência é dado por

$$R = \lim \frac{\frac{1}{(n+2)2^n}}{\frac{1}{(n+3)2^{n+1}}} = \lim \frac{2(n+3)}{(n+2)} = 2.$$

Logo, a série é absolutamente convergente para $|x+2| < 2 \Leftrightarrow -4 < x < 0$ e divergente para $|x+2| > 2 \Leftrightarrow x < -4 \wedge x > 0$. Para $|x+2| = 2$, temos:

- Se $x = 0$: obtemos a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2}$, que é divergente por comparação com a série harmónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

- Se $x = -4$: obtemos a série alternada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$. Já vimos que a série dos módulos correspondente é divergente, logo esta série não é absolutamente convergente. No entanto, aplicando o critério de Leibniz, como $0 < \frac{1}{n+2}$ é decrescente, tem-se que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$ é convergente, logo converge simplesmente.

Conclui-se que $\sum_{n=0}^{\infty}, \frac{(x+2)^n}{(n+2)2^n}$ converge absolutamente para $x \in]-4, 0[$, converge simplesmente para $x = -4$ e diverge para $x \in]-\infty, -4[\cup [0, +\infty[$.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^n}{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4x)^n}{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{2n}$, fazendo $y = -4x$. É uma série de potências com raio de convergência dado por

$$R = \lim \frac{\frac{1}{2n}}{\frac{1}{2n+2}} = 1.$$

Logo, a série é absolutamente convergente para $|y| < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < x < \frac{1}{4}$ e divergente para $|y| > 1 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{4} \vee x > \frac{1}{4}$. Para $|y| = 1$, temos:

- Se $x = -\frac{1}{4}$: obtemos a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ que é divergente por comparação com a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.
- Se $x = \frac{1}{4}$: obtemos a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n}$. Já vimos que a série dos módulos correspondente diverge, portanto a série não converge absolutamente. Do critério de Leibniz, uma vez que $\frac{1}{2n} \to 0$ e é decrescente, a série converge, e portanto converge simplesmente.

  Conclui-se que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^n}{2n}$ converge absolutamente se $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$, converge simplesmente para $x = \frac{1}{4}$ e diverge se $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{4}\right] \cup \left]\frac{1}{4}, +\infty\right[$.

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(nx)^n}{(n+1)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} x^n$ é uma série de potências, centrada em 0, cujo raio de convergência é dado por

$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{\left|\frac{n^n}{(n+1)^n}\right|}} = \lim \frac{n+1}{n} = 1.$$

Logo, a série é absolutamente convergente para $|x| < 1$ e divergente para $|x| > 1$. Para $|x| = 1$, temos:

- Se $x = 1$: obtemos a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$. Uma vez que

  $$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \to e^{-1},$$

  concluimos que a série diverge uma vez que o termo geral não converge para 0.
- Se $x = -1$: obtemos a série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^n}{(n+1)^n}$. Já vimos que $\lim \frac{n^n}{(n+1)^n} = e^{-1}$, logo $(-1)^n \frac{n^n}{(n+1)^n}$ tem dois sublimites e^{-1} e $-e^{-1}$, e a série é portanto divergente, uma vez que o termo geral não converge para 0.

Conclui-se que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(nx)^n}{(n+1)^n}$ converge absolutamente para $x \in]-1,1[$ e diverge para $x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$.

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!(x-1)^n}{n!+1}$: é uma série de potências, centrada em 1, cujo raio de convergência é dado por

$$\begin{aligned} R = \lim \frac{\frac{n!}{n!+1}}{\frac{(n+1)!}{(n+1)!+1}} &= \lim \frac{n!}{(n+1)!} \frac{(n+1)!+1}{n!+1} \\ &= \lim \frac{(n+1)!+1}{(n+1)(n!+1)} = \lim \frac{(n+1)!+1}{(n+1)!+(n+1)} \\ &= \lim \frac{1+\frac{1}{(n+1)!}}{1+\frac{1}{n!}} = 1. \end{aligned}$$

Logo, a série é absolutamente convergente para $|x-1| < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2$ e divergente para $|x-1| > 1 \Leftrightarrow x < 0 \vee x > 2$. Para $|x-1| = 1$, temos:

- Se $x = 2$, obtem-se a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!+1}$, que é divergente uma vez que $\frac{n!}{n!+1} \to 1 \neq 0$.
- Se $x = 0$, obtem-se a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!(-1)^n}{n!+1}$, que também é divergente, uma vez que $\frac{n!(-1)^n}{n!+1}$ tem dois sublimites -1 e 1, logo o termo geral da série não converge para 0.

Conclui-se que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!(x-1)^n}{n!+1}$ converge absolutamente para $x \in]0,2[$ e diverge para $x \in]-\infty,0] \cup [2,+\infty[$.

5. Determine para que valores reais de x são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes e divergentes as seguintes séries:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^{3n}}{n+1}$,

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}(x^2-x)^n$.

RESOLUÇÃO

a) Faça-se $y = (2x)^3$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{3n}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n+1}.$$

Esta é uma série de potências cujo raio de convergência e dado por

$$R = \lim \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+2}} = 1.$$

Logo, a série é absolutamente convergente para $|y| < 1$ e divergente para $|y| > 1$. Se $y = 1$ obtemos a série $\sum \frac{1}{n+1}$. Como $\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} \to 1$, esta série tem a mesma natureza que a série harmónica $\sum \frac{1}{n}$, ou seja, é divergente. Se $y=-1$, obtemos a série alternada $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$. Dado que $\frac{1}{n+1} \to 0$ e que $\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} < 0$, deduz-se, aplicando o critério de Leibniz, que a série é convergente. Como $\sum \left|\frac{(-1)^n}{n+1}\right| = \sum \frac{1}{n+1}$ e já vimos que esta série é divergente, concluimos que para $y=-1$ a série é simplesmente convergente. Então, como

$$|y|<1 \quad \Leftrightarrow \quad |(2x)^3|<1 \quad \Leftrightarrow \quad |x|<\frac{1}{2},$$

$$y=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad y=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2},$$

concluimos que a série de potências dada é absolutamente convergente se $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, simplesmente convergente se $x=-\frac{1}{2}$ e divergente se $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

b) o raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n!)^2}{(2n)!} y^n$ é dado por

$$R = \lim \frac{\frac{2^n(n!)^2}{(2n)!}}{\frac{2^{n+1}((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}} = \lim \frac{(2n+1)(2n+2)}{2(n+1)^2} = 2$$

(verificar!), logo a série converge absolutamente para $|y|<2$ e diverge para $|y|>2$. Para $|y|=2$, temos que

$$\frac{\frac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n+2)!}}{\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}} = \frac{2n+2}{2n+1} > 1$$

(verifique!), logo $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}$ é divergente ($\frac{4^{n+1}(n!)^2}{(2n)!}$ é crescente, e assim não converge para 0).

– se $y=-2$, obtemos a série alternada $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}$ que é também divergente uma vez que o seu termo geral não converge para zero (terá dois sublimites diferentes).

Conclui-se que a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n!)^2}{(2n)!} y^n$ converge absolutamente para $|y|<2$ e diverge para $|y| \geq 2$. Fazendo $y = x^2 - x$ e resolvendo em ordem a x, temos então que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n!)^2}{(2n)!} (x^2-x)^n$ converge absolutamente para $-1<x<2$ e diverge para $x \leq -1 \vee x \geq 2$.

Mais exercícios:

6. Analise a natureza das séries numéricas indicadas e determine a soma de uma delas

$$i) \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2+5}} \qquad ii) \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3-e^n}{3^n}$$

Resolução.

i) Sejam as sucessões $a_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2+5}}$ e $b_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{6}}}$ com o mesmo comportamento quando $n \to +\infty$. Tem-se

$$\lim \frac{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2+5}}}{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2}}} = \lim \frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{5}{n^2}}} = 1 \in \mathbb{R}^+,$$

Do critério de comparação as séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2+5}}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{6}}}$ têm a mesma natureza. Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{6}}}$ é uma série de Dirichlet divergente, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ com $p < 1$, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2+5}}$ é também divergente.

ii) A série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{3-e^n}{3^n}$ é uma série convergente pois é a adição de duas séries geométricas convergentes $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ e $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{e}{3}\right)^n$

A soma da série é obtida a partir da soma das anteriores séries geométricas

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3-e^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{e}{3}\right)^n = \frac{1}{1-1/3} - \frac{e/3}{1-e/3} = 3/2 - \frac{e}{3-e}$$

■

7. Analise a natureza das séries numéricas

$$i) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^3+n^{7/2}} \qquad ii) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} \cos(n\pi).$$

Resolução.

i) Seja

$$\frac{\sqrt{n}}{n^3+n^{\frac{7}{2}}} < \frac{\sqrt{n}}{n^{\frac{7}{2}}} = \frac{1}{n^3}$$

Do critério geral de comparação a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^3+n^{\frac{7}{2}}}$ é convergente, uma vez que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ é uma série Dirichlet convergente, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ com $p > 1$.

ii) Seja $\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{n!}{n^n} cos(n\pi)| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.
Tem-se

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}.\frac{n^n}{n!} = \lim \frac{n!(n+1)n^n}{(n+1)^n(n+1)n!} = \lim \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} < 1,$$

Assim pelo critério de D'Alembert a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^n}$ é convergente e consequentemente a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} cos(n\pi)$ é uma série absolutamente convergente.

■

8. Determine, se possível,o valor da soma das séries

$$i) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{e^{n-1}} \qquad ii) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{1+n^2}$$

Resolução.

i) A série

$$2e \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{2}{e})^n$$

é uma série geométrica convergente uma vez que tem razão inferior a um (2/e). O valor da sua soma é:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{e^{n-1}} = 2e\frac{2/e}{1-2/e} = \frac{4e}{e-2}$$

ii) A série não satisfaz a condição necessária da convergência de séries já que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{1+n^2} = 1 \neq 0$$

consequentemente a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^2}{1+n^2}$ é uma série divergente não tendo soma.

■

9. Analise a natureza das séries

$$i) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{1+3^{2n}} \qquad ii) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{2^n n!} \qquad iii) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\cos(\frac{\pi}{n+1}) - \cos(\frac{\pi}{n})\right)$$

Resolução.

i) Tem-se

$$\frac{3^n}{1+3^{2n}} \leq \frac{3^n}{3^{2n}} = \frac{1}{3^n}$$

Ora

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{3})^n$$

é uma série geométrica convergente consequentemente, do critério geral de comparação a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{3^n}{1+3^{2n}}$ é uma série convergente.

ii) A série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{2^n n!}$$

é uma série divergente, já que do critério de D'Alembert:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}}{\frac{n^n}{2^n n!}} = \frac{(n+1)^n(n+1)}{n^n} \frac{2^n n!}{22^n(n+1)n!}$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}(\frac{n+1}{n})^n = \frac{e}{2} > 1.$$

iii)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\cos(\frac{\pi}{n+1}) - \cos(\frac{\pi}{n})\right) \quad \text{é uma série de Mengoli convergente}$$

já que é um caso particular da classe de séries $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n - a_{n+1})$ com a sucessão $a_n = \cos(\dfrac{\pi}{n+1})$ convergente.

■

10. Considere a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n^3\sqrt{n^2+1}}$$

i) A série é absolutamente convergente? Justifique.

ii) A sucessão

$$u_n = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{8\sqrt{5}} - ... + (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n^3\sqrt{n^2+1}}$$

é convergente? Justifique.

Resolução.

i) Seja

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n^3\sqrt{n^2+1}}| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^3\sqrt{n^2+1}}$$

e as sucessões

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n^3\sqrt{n^2+1}} \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{n^{\frac{7}{2}}}$$

com o mesmo comportamento quando $n \to +\infty$. Tem-se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1,$$

e as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$, do critério de comparação, têm a mesma natureza. A série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é uma série de Dirichlet convergente e consequentemente $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^3\sqrt{n^2+1}}$ é uma série convergente.

A série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n^3\sqrt{n^2+1}}$ é pois absolutamente convergente.

ii)

$$\text{Como} \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n^3\sqrt{n^2+1}} \quad \text{é uma série absolutamente convergente}$$

é uma série convergente. Assim a sucessão das somas parciais

$$u_n = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{8\sqrt{5}} - ... + (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n^3\sqrt{n^2+1}}$$

é uma sucessão convergente.

■

11. Analise a natureza das séries numéricas indicadas e determine o valor da soma de uma delas.

$$i) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} 3^{-(2n+1)} \qquad ii) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^4+n} \qquad iii) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{1+e^n}$$

Resolução.

i) A série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 3^{-(2n+1)} = 1/3 \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{9})^n$$

é uma série geométrica de termos positivos convergente uma vez que tem razão inferior a um (1/9). O valor da sua soma é :

$$1/3 \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{9})^n = 1/3 \frac{1/9}{1-1/9} = \frac{1}{24}$$

ii) A série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^4+n}$$

é uma série convergente pelo critério de comparação já que para as sucessões com o mesmo comportamento quando $n \to +\infty$

$$a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{n^4+n} \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{n^{\frac{7}{2}}}$$

se tem

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1,$$

e a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é uma série de Dirichlet convergente.

iii) A série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{1+e^n}$$

é uma série convergente pelo critério de D'Alembert.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{(n+1)^2}{1+e^{n+1}}}{\dfrac{n^2}{1+e^n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \frac{1/e^{n+1}+1/e}{1/e^{n+1}+1} = \frac{1}{e} < 1$$

■

12. Considere a série de potências

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{5^{n+1}} (1-2x)^{n+3}$$

i) Indique o maior intervalo aberto onde a série é absolutamente convergente

ii) Determine no intervalo indicado em i) a soma da série.

Resolução.

i) Tem-se para o raio de convergência

$$r = \lim |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \lim \frac{3^n.5^{n+2}}{5^{n+1}.3^{n+1}} = \frac{5}{3}$$

Assim série converge absolutamente se $|1-2x| < \frac{5}{3}$. O maior intervalo aberto onde a série de potências é absolutamente convergente é:
$]-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}[$

ii)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{5^{n+1}} (1-2x)^{n+3} = \frac{(1-2x)^3}{5} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3-6x}{5}\right)^n =$$

$$= \frac{(1-2x)^3}{5} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3-6x}{5}\right)^n = \frac{(1-2x)^3}{5} \frac{\frac{3-6x}{5}}{1-\frac{3-6x}{5}} = \frac{3(1-2x)^4}{5(2+6x)}$$

■

13. Determine o intervalo de $\mathbb{R}$ onde é convergente a série de potências

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n^2} (x-1)^{n+2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Resolução.

Tem-se para o raio de convergência

$$r = \lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim \frac{\frac{1}{2^n n^2}}{\frac{1}{2^{n+1}(n+1)^2}} = 2$$

Assim a série converge absolutamente se $|x-1| < 2$ i.e. se $x \in]-1,3[$.
Para $x = -1$, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ é uma série de Dirichlet convergente. Para $x = 3$, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} |\frac{(-1)^n}{n^2}| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ é uma série de Dirichlet convergente.
Em conclusão a série de potências converge absolutamente para $x \in [-1,3]$.

■