DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Exercícios de Cálculo Diferencial e Integral I , 1.º S 2024/25

Sucessões. Séries numéricas. Séries de potências e séries de Taylor

Sucessões

1. Determine, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os limites das seguintes sucessões:

$$a)\frac{\sqrt{n^5}+n^3}{n+\sqrt{n}} \quad b)\frac{3^n}{2^{1+2n}}+\frac{\sqrt[3]{n}+1}{\sqrt[3]{n+1}} \quad (c)\frac{n^{80}+n!}{n^n+50n!} \quad d)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n!} \quad e)\frac{4^n}{1+4^{n^2}}$$

$$f)\frac{1000^n+n!}{(n+1)!} \quad g)\frac{\cos(n)}{2^n} \quad h)\frac{n!4^n}{n^n} \quad i)\frac{n^{20}+n!}{30n!+(-1)^n} \quad j)\frac{2n^n(n+1)}{(n+1)^{n+1}} \quad l)\frac{2^n(n^2+2)}{3^n}.$$

2. Decida, justificando, se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa

   a) Se (u_n) é uma sucessão tal que $u_n \in]-1,0[\cup\{2\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então $\lim(u_n/\sqrt{n}) = 0$.
   b) Se (u_n) é uma sucessão estritamente crescente tal que $u_n \in]-10,0[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então (u_n) converge para zero.
   c) Se (u_n) é positiva e $u_{n+1}/u_n < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então (u_n) é convergente.
   d) Se (u_n) é convergente então $(-1)^n u_n$ é limitada.

Séries numéricas

3. Mostre que cada uma das séries é convergente com soma igual ao valor indicado

$$a)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{3^{n-1}}=3\,, \quad b)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{n+1}}{5^{n-1}}=\frac{50}{3}\,, \quad c)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}}=1\,, \quad d)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}=\frac{5}{3}\,.$$

4. Estude a natureza das seguintes séries numéricas e em caso de convergência determine o valor da soma da série

$$a)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^{n+1}}{2^{2n}}\,, \quad b)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2+\cos(n\pi)}\,, \quad c)\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\,,$$

$$d)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}\,, \quad e)\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\,.$$

5. Estude a natureza das seguintes séries numéricas, usando critérios de convergência para séries de termos não negativos e indique o valor da soma de duas das séries de natureza convergente.

$$a)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-e}{e^n}\,, \quad b)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^n}{3^n n!}\,, \quad c)\sum_{n=1}^{+\infty}\operatorname{arctg}(\frac{1}{n^2})\,, \quad d)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^3+1}}\,,$$

$$e)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!n^n}{2^{n^2}}\,,\quad f)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n}+1}{n^2+n}\,,\quad g)\sum_{n=1}^{+\infty} n\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{n}\right)\,,\quad h)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n+1)!}\,.$$

$$i)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^n n!}{(2n)!}\,,\quad j)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\cos^2(n)}{n^2+2}\,,\quad k)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{arctg}(n)}{4^n+1}\,,\quad l)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}\,.$$

6. Sendo $a_n > 0$ e $a_n \to +\infty$, estude a natureza das seguintes séries numéricas:

$$a)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{1+a_n}\quad,\quad b)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3^n+a_n}$$

7. Sendo $a_n > 0$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ convergente, mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n}$ é também convergente.

8. Estude a natureza de cada uma das séries seguintes. No caso de convergência indique o tipo de convergência (se a convergência das séries é absoluta ou simples).

$$a)\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{n^3}\,,\quad b)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}\,,\quad c)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n+n^4}{e^n+n^3}\,,\quad d)\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}\,,$$

$$e)\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{n}\right)\,,\quad f)\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\,\ln n}\,,\quad g)\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\,,\quad h)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+(-1)^n}{2n}\,.$$

Séries de potências e séries de Taylor

9. Para cada uma das séries de potências, determine o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a série é absolutamente convergente, simplesmente convergente ou divergente.

$$a)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}x^n\quad,\quad b)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n(x-2)^n}{\sqrt{n^6+1}}\quad,\quad c)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2x+1)^{n+1}}{n(n+1)}\quad,\quad d)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1-3x)^{2n}}{5^n(n+1)}\,.$$

10. Seja f a função definida por expressão

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2x)^{n+1}}{4^{n-1}}$$

no conjunto dos pontos onde a série é convergente. Determine o domínio da função f e calcule $f(-1)$.

11. Considere a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{1-n}(x+1)^{n+2},\ \ x \in \mathbb{R}$

   a) Determine o intervalo de $\mathbb{R}$, onde a convergência da série é absoluta
   b) Determine a soma da série quando $x = 0$.

12. Determine $a \in \mathbb{R}$ de modo que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^{n+1}}{n+1}\, x^n$$

seja convergente em $x = -3$ e divergente em $x = 3$.

13. Indique a série de Taylor em potências de x da função $f(x) = 5^x + \dfrac{1}{9 - x^2}$ e o maior intervalo de $\mathbb{R}$ em que a série representa a função.

14. Indique a série de Taylor em potências de $x - 1$ da função $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

15. Desenvolva as seguintes funções em série de Taylor no ponto zero, indicando o intervalo onde esse desenvolvimento é válido.

a) $f_1(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$,

b) $f_2(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x-2)}$,

c) $f_3(x) = \operatorname{arctg} x^2$,

d) $f_4(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$.