DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Exercícios de Cálculo Diferencial e Integral I , 1.º S 2024/25

Sucessões. Séries numéricas. Séries de potências e séries de Taylor

Sucessões

1. a) $+\infty$.

   b) $0+1$.

   c) 0.

   d) $+\infty$.

   e) 0.

   f) 0.

   g) 0.

   h) $+\infty$.

   i) $\frac{1}{30}$.

   j) $\frac{2}{e}$.

   k) 0.

2. a) V O produto de uma sucessão limitada por um infinitésimo é um infinitésimo.
   b) F Por exemplo $(u_n = -2 - 1/n)$.
   c) V Toda a sucessão monótona e limitada é convergente.
   d) V Se (u_n) é convergente então u_n é limitada consequentemente $(-1)^n u_n$ é tb. limitada.

Séries numéricas

3.

4. a) Série convergente com soma 9.

   b) Série divergente.

c) Série divergente.

d) Série convergente com soma 1/2.

e) Série divergente.

5. a) Série convergente com soma -1.

   b) Série convergente.

   c) Série convergente.

   d) Série divergente.

   e) Série convergente.

   f) Série convergente.

   g) Série divergente.

   h) Série convergente com soma -1 .

   i) Série convergente.

   j) Série convergente.

   k) Série convergente.

   l) Série convergente.

6. a) Série divergente, uma vez que $\lim \dfrac{a_n}{1+a_n} \neq 0$.

   b) Série convergente por comparação com $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$.

7. Sugestão: Considere a desigualdade $(a_n - 1/n)^2 \geq 0$.

8. a) Série divergente.

   b) Série absolutamente convergente.

   c) Série absolutamente convergente.

d) Série simplesmente convergente.

e) Série simplesmente convergente.

f) Série divergente.

g) Série simplesmente convergente.

h) Série divergente.

Séries de potências e séries de Taylor

9. a) Série absolutamente convergente para $x \in]-1,1[$.
Série simplesmente convergente para $x = 1$.
Série divergente para $x \in \mathbb{R} \backslash]-1,1]$.

b) Série absolutamente convergente para $x \in [1,3]$.
Série divergente para $x \in \mathbb{R} \setminus [1,3]$.

c) Série absolutamente convergente para $x \in [-1,0]$.
Série divergente para $x \in \mathbb{R} \setminus [-1,0]$.

d) Série absolutamente convergente para $x \in [\frac{1-\sqrt{5}}{3}, \frac{1+\sqrt{5}}{3}]$.
Série divergente para $x \in \mathbb{R} \setminus [\frac{1-\sqrt{5}}{3}, \frac{1+\sqrt{5}}{3}]$.

10. Série absolutamente convergente para $x \in]-2,2[$.
Série divergente para $x \in \mathbb{R} \setminus [-1,0]$.
$Dom_f =]-2,2[$ e $f(-1) = 8/3$.

11. a) Série absolutamente convergente para $x \in]-3,1[$.

b) A soma da série quando $x = 0$ é 2.

12. $a = 1/3$.

13. $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\ln^n(5)}{n!} + \frac{1+(-1)^n}{2.3^{n+2}} \right) x^n, \quad x \in]-3,3[$

14. $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{(-1)^n(2)^{n+1}}, \quad x \in]-1,3[$.

15. Desenvolva as seguintes funções em série de Taylor no ponto zero, indicando o intervalo onde esse desenvolvimento é válido.

a) $f_1(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (n+1) x^n, \quad x \in]-1,1[.$

b) $f_2(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2}\left((-1)^{n+1} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) x^n, \quad x \in]-1,1[.$

c) $f_3(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{4n+2}, \quad x \in]-1,1[.$

d) $f_4(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!} x^{2n+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$