DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Probabilidades e Estatística

LEAmb, LEAN, LEEC21, LEGM, LEMat

2º Semestre – 2022/2023
14/07/2023
18:00–20:00

Duração: **120** minutos **Exame Época Recurso – C**

- As questões de escolha múltipla têm uma e apenas uma resposta correta. Caso assinale uma resposta errada, serão descontados 0.5 valores.
- Se assinalar mais do que uma resposta numa questão de escolha múltipla, o resultado será classificado como errado e serão descontados 0.5 valores.
- As respostas às questões de escolha múltiplas têm de ser assinaladas na folha de instruções previamente distribuída.
- Para as restantes questões, terá de justificar convenientemente as suas respostas.

Pergunta 1 — 2 valores

Um empresa instala painéis dos modelos 1 e 2 nas proporções de 40% e 60%, respetivamente. Os painéis do modelo 1 (respectivamente 2) necessitam intervenção da companhia no primeiro ano após a sua instalação com probabilidade 3% (respetivamente 2%).

Determine a probabilidade de um painel instalado pela empresa que necessitou de intervenção da companhia no primeiro ano após a sua instalação ser um painel do modelo 1.

- **Acontecimentos e probabilidades para um painel instalado pela companhia**

Acontecimento	Probabilidade
A = "painel ser do modelo 1"	$P(A) = 0.4$
$\overline{A}$ = "painel ser do modelo 2"	$P(\bar{A}) = 0.6$
I = "painel necessitar intervenção no primeiro ano após a sua instalação"	
	$P(I \mid A) = 0.03$
	$P(I \mid \overline{A}) = 0.02$

- **Cálculo da probabilidade pedida**

Recorrendo ao teorema de Bayes, obtemos

$$\begin{aligned} P(A \mid I) &= \frac{P(I \mid A) \times P(A)}{P(I)} = \frac{P(I \mid A) \times P(A)}{P(I \mid A) \times P(A) + P(I \mid \bar{A}) \times P(\bar{A})} \\ &= \frac{0.03 \times 0.4}{0.03 \times 0.4 + 0.02 \times 0.6} = \frac{0.012}{0.012 + 0.012} = 0.5. \end{aligned}$$

Pergunta 2 — 2 valores

A taxa de alfabetização das mulheres em determinado país asiático é de 12%.

Qual é a probabilidade de que seja necessário questionar mais de 5 mulheres de tal país até encontrar a primeira mulher não alfabetizada, sabendo que as primeiras 3 mulheres questionadas são alfabetizadas?

A: 0.3185 **B**: 0.0144 **C**: 0.4723 **D**: 0.0720

Todas(os) alunas(os) terão a cotação de 2 valores nesta questão.

- **V.a. de interesse**

X = número total de mulheres questionadas até encontrar uma mulher não alfabetizada

- **Distribuição**

  $X \sim \text{geométrica}(p)$

  $p = P(\text{mulher não alfabetizada}) = 0.88$

- **F.p. de X**

  $P(X = x) = (1-0.88)^{x-1} \times 0.88, \quad x = 1,2,3,\ldots$

- **Probabilidade pedida**

  Ao invocarmos a propriedade da falta de memória da distribuição geométrica, obtemos

$$\begin{aligned}
P(X > 5 \mid X > 3) &= P(X > 3+2 \mid X > 3) = P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) \\
&= 1 - \sum_{x=1}^{2} (1-0.88)^{x-1} \times 0.88 = 1 - (0.88 + 0.12 \times 0.88) \\
&= 0.0144.
\end{aligned}$$

  [Atendendo a que $F_X(x) = \sum_{i=1}^{x} (1-p)^{i-1} \times p = 1-(1-p)^x, x \in \mathbb{N}$, onde $p = 0.88$ temos, alternativamente, $P(X > 5 \mid X > 3)$ igual a

$$\frac{P(X > 5, X > 3)}{P(X > 3)} = \frac{P(X > 5)}{P(X > 3)} = \frac{1-F_X(5)}{1-F_X(3)} = \frac{(1-p)^5}{(1-p)^3} = (1-p)^2 \equiv 1 - F_X(2) = 0.12^2 = 0.0144.]$$

Pergunta 3	2 valores

Um engenheiro fez várias medições respeitantes a uma caraterística física. Essas medições podem ser consideradas como observações de uma variável aleatória X normalmente distribuída com valor esperado μ e desvio padrão $\sigma = 0.25\mu$.

Calcule a probabilidade de uma medição ser inferior a 1.5μ.

- **V.a.**

  X = medição da caracteística física

  $X \sim \text{normal}(\mu, \sigma^2 = 0.25^2\mu^2)$

- **Probabilidade pedida**

$$\begin{aligned}
P(X < 1.5\mu) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{1.5\mu-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{X-\mu}{2\mu} < \frac{1.5\mu-\mu}{0.25\mu}\right) \\
&= \Phi(2) \\
&\stackrel{tabelas, calc.}{=} 0.9772.
\end{aligned}$$

Pergunta 4	2 valores

Admita que os números diários de peças defeituosas produzidas por uma pequena empresa são variáveis aleatórias independentes com distribuição comum de Poisson com valor esperado igual a 1.8.

Determine um valor aproximado para o quantil de probabilidade 0.15 do número total de peças defeituosas produzidas em 50 dias.

- **V.a.; valor esperado e variância comuns**

  X_i = número de peças defeituosas produzidas no dia i, $\quad i = 1,\ldots,n$

$n = 50 > 30$

$X_i \overset{i.i.d.}{\sim} X \sim \text{Poisson}(\lambda = 1.8), \quad i = 1, \ldots, n$

$E(X_i) = E(X) = \mu = \lambda = 1.8$

$V(X_i) = V(X) = \sigma^2 = \lambda = 1.8$

- **V.a. de interesse**

  $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ = número total de peças defeituosas produzidas em n dias

- **Valor esperado e variância de S_n**

  $E(S_n) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) \overset{X_i \sim X}{=} n\,E(X) = n\,\mu$

  $V(S_n) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \overset{X_i\, indep.}{=} \sum_{i=1}^{n} V(X_i) \overset{X_i \sim X}{=} n\,V(X) = n\,\sigma^2$

- **Distribuição aproximada de S_n**

  Segundo o teorema do limite central (TLC),

  $$\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} = \frac{S_n - n\,E(X)}{\sqrt{n\,V(X)}} = \frac{S_n - n\,\mu}{\sqrt{n\,\sigma^2}} \overset{a}{\sim} \text{normal}(0,1).$$

- **Quantil pedido (valor aproximado)**

  $$\begin{aligned}
  \xi \quad : \quad & P(S_n \leq \xi) = 0.15 \\
  & P\left(\frac{S_n - n\,\mu}{\sqrt{n\,\sigma^2}} \leq \frac{\xi - n\,\mu}{\sqrt{n\,\sigma^2}}\right) = 0.15 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{\xi - n\,\mu}{\sqrt{n\,\sigma^2}}\right) \overset{TLC}{\simeq} 0.15 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\xi - n\,\mu}{\sqrt{n\,\sigma^2}} \simeq \Phi^{-1}(0.15) \\
  & \xi \simeq n\,\mu + \sqrt{n}\,\sigma \times \Phi^{-1}(0.15) \quad \Leftrightarrow \quad \xi \overset{tabelas/calc.}{\simeq} 50 \times 1.8 + \sqrt{50} \times \sqrt{1.8} \times (-1.0364) \\
  & \xi \simeq 80.1678.
  \end{aligned}$$

  Como S_n é v.a. inteira não negativa, o quantil aproximado pedido é 80[, que coincide com o quantil de probabilidade 0.15 da distribuição exacta, $F^{-1}_{Poisson(50\times 1.8=90)}(0.15)$].

Pergunta 5	2 valores

Seja (X, Y) um par aleatório contínuo com função de densidade de probabilidade conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 3(x+y), & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Deduza a função de densidade de probabilidade marginal de X.

- **Par aleatório**

  (X, Y) com a f.d.p. conjunta do enunciado

- **F.d.p. marginal de X**

  $$\begin{aligned}
  f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy \\
  &= \int_{0}^{1-x} 3(x+y)\,dy \\
  &= \left.\left(3xy + \frac{3y^2}{2}\right)\right|_0^{1-x} = 3x(1-x) + \frac{3(1-x)^2}{2} + = \frac{6x - 6x^2 + 3 - 6x + 3x^2}{2} = \frac{3}{2}(1-x^2), \quad 0 \leq x \leq 1.
  \end{aligned}$$

Pergunta 6	2 valores

Admita que a resistência à ruptura (em *gigapascal*) de certa fibra de carbono é representada pela variável aleatória X com função de densidade de probabilidade

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{\theta}\exp\left(-\frac{x^2}{2\theta}\right), & x > 0 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde θ é um parâmetro positivo desconhecido.

Deduza o estimador de máxima verosimilhança de θ, baseado numa amostra aleatória de dimensão n proveniente de X.

- **V.a. de interesse; f.d.p.**

  X = resistência à ruptura...

  $$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{\theta}\exp\left(-\frac{x^2}{2\theta}\right), & x > 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- **Parâmetro desconhecido**

  $\theta \quad (\theta > 0)$

- **Amostra; amostra aleatória**

  $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, amostra de dimensão n proveniente de X.

  $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$, amostra aleatória de dimensão n proveniente de X.

- **Obtenção da estimativa de MV de β**

  Passo 1 — Função de verosimilhança

  $$\begin{aligned} L(\theta \mid \underline{x}) &= f_{\underline{X}}(\underline{x}) \stackrel{X_i \, indep}{=} \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) \stackrel{X_i \sim X}{=} \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i) \\ &= \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{x_i}{\theta}\exp\left(-\frac{x_i^2}{2\theta}\right)\right] \\ &= \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) \times \theta^{-n} \times \exp\left(-\frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right), \quad \theta > 0 \end{aligned}$$

  Passo 2 — Função de log-verosimilhança

  $$\ln L(\theta|\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) - n\ln(\theta) - \frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i^2, \quad \theta > 0$$

  Passo 3 — Maximização

  A estimativa de MV de θ é representada por $\hat{\theta}$ e

  $$\hat{\theta} \; : \; \begin{cases} \left.\frac{d\ln L(\theta|\underline{x})}{d\theta}\right|_{\theta=\hat{\theta}} = 0 & \text{(ponto de estacionaridade)} \\ \left.\frac{d^2\ln L(\theta|\underline{x})}{d\theta^2}\right|_{\theta=\hat{\theta}} < 0 & \text{(ponto de máximo)} \end{cases}$$

  $$\begin{cases} -\frac{n}{\hat{\theta}} + \frac{1}{2\hat{\theta}^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \\ \frac{n}{\hat{\theta}^2} - \frac{1}{\hat{\theta}^3}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{\theta} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ -\frac{n}{\hat{\theta}^2} < 0 \quad \text{(prop. verdadeira)} \end{cases}$$

  Passo 4 — Estimador de MV de θ

  $$\hat{\theta} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2.$$

Pergunta 7	2 valores

Admita que o peso máximo suportado por uma marquesa portátil ergonómica é uma variável aleatória X com distribuição normal com valor esperado e variância desconhecidos. Foram selecionadas aleatoriamente 30 dessas marquesas, tendo-se observado uma média e a variância corrigida amostrais iguais a $\bar{x} = 152.3$ e $s^2 = 2.8^2$.

Determine um intervalo de confiança exato a 98% para o valor esperado de X.

A: [151.04, 153.56] **B**: [152.20, 154.40] **C**: [154.04, 156.56] **D**: [148.78, 155.82]

- **V.a. de interesse**

  X = peso máximo suportado por uma marquesa portátil ergonómica

- **Situação**

  $X \sim \text{normal}(\mu, \sigma^2)$, $\mu = E(X)$ DESCONHECIDO, $\sigma^2 = V(X)$ desconhecido

- **Obtenção do IC para μ**

  Passo 1 — Variável aleatória fulcral para μ

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{(n-1)}.$$

  Passo 2 — Quantis de probabilidade

  Dado que $n = 30$, $(1-\alpha) \times 100\% = 98\%$, usaremos os quantis

$$(a_\alpha, b_\alpha) \quad : \quad \begin{cases} P(a_\alpha \le Z \le b_\alpha) = 1 - \alpha \\ P(Z < a_\alpha) = P(Z > b_\alpha) = \alpha/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_\alpha = F^{-1}_{t_{(n-1)}}(\alpha/2) = F^{-1}_{t_{(29)}}(0.01) = -2.462 \\ b_\alpha = F^{-1}_{t_{(n-1)}}(1-\alpha/2) = F^{-1}_{t_{(29)}}(0.99) = 2.462. \end{cases}$$

- **Passo 3 — Inversão da desigualdade $a_\alpha \le Z \le b_\alpha$**

$$P(a_\alpha \le Z \le b_\alpha) = 1 - \alpha$$
$$P\left[a_\alpha \le \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \le b_\alpha\right] = 1 - \alpha$$
$$P\left[\bar{X} - b_\alpha \times \frac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} - a_\alpha \times \frac{S}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha$$

- **Passo 4 — Concretização**

  Atendendo à expressão geral do IC para μ,

$$IC_{(1-\alpha)\times 100\%}(\mu) = \left[\bar{x} \pm F^{-1}_{t_{(n-1)}}(1-\alpha/2) \times \frac{s}{\sqrt{n}}\right],$$

  ao par de quantis acima e ao facto de $n = 30$, $\bar{x} = 152.3$ e $s = 2.8$, temos:

$$\begin{aligned} IC_{98\%}(\mu) &= \left[152.3 - 2.462 \times \frac{2.8}{\sqrt{30}}, 152.3 + 2.462 \times \frac{2.8}{\sqrt{30}}\right] \\ &\simeq [151.04, 153.56]. \end{aligned}$$

Pergunta 8	2 valores

Suponha que o comprimento (em mm) de uma peça é uma variável aleatória com distribuição normal com valor esperado desconhecido μ e variância igual a $\sigma^2 = 1$.

Teste a hipótese $H_0 : \mu = 100$ contra $H_1 : \mu \neq 100$, num dia em que foram recolhidas casualmente 4 peças e a média amostral foi de $\bar{x} = 101$. Decida com base no valor-p do teste.

- **V.a. de interesse**

  X = comprimento de uma peça metálica

- **Situação**

  $X \sim \text{normal}(\mu, \sigma^2)$

  μ desconhecido

  $\sigma = 1$

- **Hipóteses**

  $H_0 : \mu = \mu_0 = 100 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$

- **Estatística de teste**

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim_{H_0} \text{normal}(0,1)$$

- **Região de rejeição de H_0 (para valores da estatística de teste)**

  O teste é bilateral ($H_1 : \mu \neq \mu_0$), pelo que a região de rejeição de H_0 é do tipo $(-\infty, -c) \cup (c, +\infty)$.

- **Decisão (com base no valor-p)**

  Atendendo a que o valor observado da estatística de teste e o valor-p aproximado são iguais a

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{101 - 100}{1/\sqrt{4}} = 2$$

$$valor - p = P(T > |t| \mid H_0) = 2 \times [1 - \Phi(t)] = 2 \times [1 - \Phi(2)] \stackrel{tabelas/calc.}{=} 2 \times (1 - 0.9772) = 0.0456,$$

  é suposto:

  - não rejeitar H_0 a qualquer n.s. $\alpha_0 \leq valor - p = 4.56\%$, designadamente ao nível usual de significância (n.u.s.) de 1%;
  - rejeitar H_0 a qualquer n.s. $\alpha_0 > valor - p = 4.56\%$, nomeadamente aos n.u.s. de 5% e 10%.

Pergunta 9	2 valores

O responsável por uma loja oficial de turismo de uma pequena localidades conjetura que o número diário de visitantes se distribui uniformemente pelas classes indicadas na tabela abaixo (hipótese H_0). Uma amostra casual conduziu à seguinte tabela de frequências:

Número diário de visitantes	$\{0,1\}$	2	3	$\{4,5,\ldots\}$
Frequência absoluta observada	12	12	10	16
Frequência absoluta esperada sob H_0	12.5	12.5	12.5	12.5

Efetue o teste de ajustamento do qui-quadrado para testar H_0 ao nível de significância de 10%.

- **V.a. de interesse**

  X = número diário de visitantes

- **Hipóteses**

  $H_0 : P(X \in \{0,1\}) = P(X = 2) = P(X = 3) = P(X \in \{4,5,\ldots\}) = 1/4$

  $H_1 : \neg H_0$

- **Nível de significância**

  $\alpha_0 = 10\%$

- **Estatística de teste**

$$T = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \overset{a}{\sim}_{H_0} \chi^2_{(k-1)},$$

  onde: k = no. de classes = 4; O_i = frequência absoluta observável da classe i; E_i = frequência absoluta esperada, sob H_0, da classe i.

- [**Frequências absolutas esperadas sob** H_0 — De acordo com a tabela facultada, as frequências absolutas esperadas sob H_0 aproximadas às centésimas são: $E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = 12.5 = n/k$. Não é necessário fazer qualquer agrupamento de classes uma vez que se verifica $E_i \geq 5$, em pelo menos 80% das classes, e que $E_i \geq 1$, para todo o i. Caso fosse preciso efectuar agrupamento de classes, os valores de k e $c = F^{-1}_{\chi^2_{(k-1)}}(1-\alpha_0)$ teriam que ser recalculados...]

- **Região de rejeição de** H_0 (para valores de T)

  Lidamos com um teste de ajustamento, donde a região de rejeição de H_0 é o intervalo à direita $W = (c, +\infty)$, onde

$$c = F^{-1}_{\chi^2_{(k-\beta-1)}}(1-\alpha_0) = F^{-1}_{\chi^2_{(4-1)}}(1-0.10) \overset{tabela/calc.}{=} 6.251.$$

- **Decisão**

i	Classe i	Freq. abs. obs. o_i	Freq. abs. esp. sob H_0 E_i	Parcelas valor obs. estat. teste $\frac{(o_i-E_i)^2}{E_i}$
1	$\{0,1\}$	12	12.5	$\frac{(12-12.5)^2}{12.5} = 0.02$
2	$\{2\}$	12	12.5	0.02
3	$\{3\}$	10	12.5	0.50
4	$\{4,5,\ldots\}$	16	12.5	0.98
		$\sum_{i=1}^k o_i = n = 50$	$\sum_{i=1}^k E_i = n = 50$	$t = \sum_{i=1}^k \frac{(o_i-E_i)^2}{E_i} = 1.52$

  Dado que $t \simeq 1.52 \not\in W = (6.251, +\infty)$, não devemos rejeitar H_0 ao n.s. de $\alpha_0 = 10\%$ [nem a qualquer outro n.s. inferior a α_0].

Pergunta 10 — 2 valores

O rendimento de um processo químico é uma variável aleatória Y cujo valor esperado é uma função linear da temperatura, x (em graus centígrados). Uma amostra de valores de x e Y conduziu a:

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 250, \quad \sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 18750, \quad \sum_{i=1}^{5} y_i = 277, \quad \sum_{i=1}^{5} y_i^2 = 19357, \quad \sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 18850, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{56}{15},$$

onde $\min_{i=1,\ldots,5} x_i = 0$ e $\max_{i=1,\ldots,5} x_i = 100$. Admita que as variáveis x e Y estão relacionadas de acordo com o modelo de regressão linear simples, $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon$.

Tendo presente as hipóteses de trabalho convenientes, deduza um intervalo de confiança a 95% para o valor esperado do rendimento para uma temperatura de 50^oC.

- **[Modelo de RLS e hipóteses de trabalho**

  Y = rendimento de um processo químico (v.a. resposta)

  x = temperatura (variável explicativa)

  $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n, \qquad \epsilon_i \overset{i.i.d.}{\sim} \text{normal}(0, \sigma^2), \quad i = 1, \ldots, n]$

- **Obtenção do IC a** 90% **para** $E(Y \mid x_0)$

  Passo 1 — V.a. fulcral para $E(Y \mid x_0) = \beta_0 + \beta_1 x_0$

  $$Z = \frac{(\hat\beta_0 + \hat\beta_1 x_0) - (\beta_0 + \beta_1 x_0)}{\sqrt{\hat\sigma^2 \times \left[\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar x)^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\,\bar x^2}\right]}} \sim t_{(n-2)}$$

  Passo 2 — Quantis de probabilidade

  $\pm F^{-1}_{t_{(n-2)}}(1-\alpha/2) = \pm F^{-1}_{t_{(5-2)}}(1-0.05/2) \overset{tabela/calc.}{=} \pm 3.182.$

  Passo 3 — Inversão da desigualdade $a_\alpha \le Z \le b_\alpha$

  $$P(a_\alpha \le Z \le b_\alpha) = 1 - \alpha$$

  $$P\left\{ a_\alpha \le \frac{(\hat\beta_0 + \hat\beta_1 x_0) - (\beta_0 + \beta_1 x_0)}{\sqrt{\hat\sigma^2 \times \left[\frac{1}{n} + \frac{(\bar x - x_0)^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\,\bar x^2}\right]}} \le b_\alpha \right\} = 1 - \alpha$$

  $$P\left\{ (\hat\beta_0 + \hat\beta_1 x_0) - b_\alpha \times \sqrt{\hat\sigma^2 \times \left[\frac{1}{n} + \frac{(\bar x - x_0)^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\,\bar x^2}\right]} \le \beta_0 + \beta_1 x_0 \le \right.$$

  $$\left. (\hat\beta_0 + \hat\beta_1 x_0) - a_\alpha \times \sqrt{\hat\sigma^2 \times \left[\frac{1}{n} + \frac{(\bar x - x_0)^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\,\bar x^2}\right]} \right\} = 1 - \alpha$$

  Passo 4 — Concretização

  Temos $n = 5$ e

  - $\bar x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i = \frac{250}{5} = 50$

    $\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\,\bar x^2 = 18750 - 5 \times 50^2 = 6250$
  - $\bar y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i = \frac{277}{5} = 55.4$
  - $\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\,\bar x\,\bar y = 18850 - 5 \times 50 \times 55.4 = 5000$
  - $\hat\beta_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\,\bar x\,\bar y}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\,\bar x^2} = \frac{5000}{6250} = 0.8$

    $\hat\beta_0 = \bar y - \hat\beta_1 \times \bar x = 55.4 - 0.8 \times 50 = 15.4$

    $\hat E(Y \mid x = x_0 = 50 = \bar x) = \hat\beta_0 + \hat\beta_1 \times 50 = 15.4 + 0.8 \times 50 = 55.4 \equiv \bar y = (\bar y - \hat\beta_1 \times \bar x) + \hat\beta_1 \times \bar x$
  - $\hat\sigma^2 = \frac{56}{15}$

  A expressão geral de $IC_{(1-\alpha)\times 100\%}(\beta_0 + \beta_1 x_0)$ é dada por

  $$\left[(\hat\beta_0 + \hat\beta_1 x_0) \pm F^{-1}_{t_{(n-2)}}(1-\alpha/2) \times \sqrt{\hat\sigma^2 \times \left[\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar x)^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\,\bar x^2}\right]} \right].$$

  Donde,

  $$IC_{95\%}(\beta_0 + \beta_1 \times 50) \quad = \quad \left[55.4 \pm 3.182 \times \sqrt{\frac{56}{15} \times \left[\frac{1}{5} + \frac{(50-50)^2}{6250}\right]} \right] \simeq [52.6504, 58.1496].$$