Introdução à Probabilidade e Estatística

MA

2º Trimestre – 2024/2025
07/01/2025 — 12:30, IA
MAP45 #3 — 45 minutos

- Justifique convenientemente as suas respostas e escreva os resultados com casas decimais.
- Só pode sair da sala vinte e cinco minutos após o início do MAP, devendo nesse caso entregar a sua prova ou desistir da mesma. Escreva o seu número e nome completo abaixo.

Número: **Nome completo**:

1. Num concurso internacional para a concepção de um hotel, 40% das (mais de 100) propostas apresentadas foram liminarmente excluídas por incumprimento do regulamento. **(1.0)**

Obtenha a probabilidade de haver mais de cinco propostas liminarmente excluídas por incumprimento do regulamento, em dez propostas seleccionadas ao acaso e com reposição entre todas as propostas apresentadas.

- **V.a., distribuição e f.p.**
  X = no. de propostas liminarmente excluídas..., em dez propostas seleccionadas ao acaso e com reposição entre as propostas apresentadas

  $X \sim \text{binomial}(n=10, p=0.4)$

  $P(X=x) \overset{form.}{=} \binom{10}{x} 0.4^x (1-0.4)^{10-x}, \quad x=0,1,\ldots,10$
- **Prob. pedida**

  $$P(X>5) = 1-P(X\le 5) = 1-F_X(5) \overset{tabelas, calc}{\simeq} 1-0.8338 = 0.1662.$$

  [Alternativamente, $P(X>5) = \sum_{x=6}^{10} P(X=x) = \sum_{x=6}^{10} \binom{10}{x} 0.4^x (1-0.4)^{10-x} \overset{calc}{\simeq} 0.1662.$]

2. Num estudo da forma de fruição de um parque público concluiu-se que o número diário (X) de visitantes que param junto a um passadiço possui distribuição de Poisson com variância igual a 24.

(a) Calcule a probabilidade de durante um dia pararem menos de 30 visitantes junto a esse passadiço, sabendo que pelo menos um visitante efectuou tal paragem. **(1.2)**

- **V.a., distribuição e f.p.**
  X = no. de número diário de visitantes que param junto ao passadiço

  $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$

  $\lambda : V(X) = 24 \overset{form.}{\Leftrightarrow} \lambda = 24$

  $P(X=x) \overset{form.}{=} \frac{e^{-24}24^x}{x!}, \quad x=0,1,2,\ldots$
- **Prob. pedida**

  $$\begin{aligned} P(X<30 \mid X\ge 1) &= \frac{P(X<30, X\ge 1)}{P(X\ge 1)} = \frac{P(1\le X<30)}{1-P(X<1)} = \frac{P(0<X\le 29)}{1-P(X\le 0)} \\ &= \frac{F_X(29)-F_X(0)}{1-P(X\le 0)} \overset{tabelas, calc}{\simeq} \frac{0.8679-0.0000}{1-0.0000} = 0.8679. \end{aligned}$$

(b) Uma arquitecta assumiu que o tempo (T, em horas) entre duas paragens consecutivas de visitantes junto a esse passadiço possui função de densidade de probabilidade dada por **(1.5)**

$$f_T(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t\ge 0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Calcule: (i) a função de distribuição de T, $F_T(t) = P(T\le t)$, $t\in\mathbb{R}$; (ii) a mediana de T, me; (iii) $P(me \le T \le 1)$.

- **V.a. e f.d.p.**
  T = tempo (em horas) entre duas paragens consecutivas de visitantes junto ao passadiço

$$f_T(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- **F.d. e mediana de T**

$$F_T(t) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f_T(y)\, dy = \begin{cases} \int_{-\infty}^{t} 0\, dy = 0, & t < 0 \\ \int_{-\infty}^{0} 0\, dy + \int_{0}^{t} e^{-y}\, dy = 0 - e^{-y}|_0^t = 1 - e^{-t}, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$me \geq 0 \quad : \quad F_T(me) = 0.5 \Leftrightarrow 1 - e^{-me} = 0.5 \Leftrightarrow e^{-me} = 0.5 \Leftrightarrow me = -\ln(0.5) \simeq 0.6931$$

- **Prob. pedida**

$$P(me \leq T \leq 1) = F_T(1) - F_T(me) = (1 - e^{-1}) - 0.5 = 0.5 - e^{-1} \simeq 0.1321.$$

3. Suponha que o tempo (X, em anos) de execução de determinada obra de reabilitação é representado por uma variável aleatória com distribuição uniforme contínua no intervalo $[0.5, 2.5]$. **(1.5)**

Obtenha: (i) o desvio padrão de X; (ii) $E(100+10X+3\sqrt{X})$, o custo esperado da obra de reabilitação (em milhares de euros).

- **V.a., distribuição e f.d.p.**

  X = tempo (em anos) de execução de obra de reabilitação

  $X \sim \text{uniforme}(a = 0.5, b = 2.5)$

$$f_X(x) \stackrel{form.}{=} \begin{cases} \frac{1}{b-a} = \frac{1}{2.5-0.5} = \frac{1}{2}, & 0.5 \leq x \leq 2.5 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- **Desvio padrão e valor esperado pedidos**

$$\begin{aligned} V(X) &\stackrel{form.}{=} \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(2.5-0.5)^2}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}. \\ DP(X) &= +\sqrt{V(X)} = \sqrt{1/3} \simeq 0.5774 \quad \text{(em anos)} \\ E(100+10X+3\sqrt{X}) &= 100 + 10\,E(X) + 3E(\sqrt{X}) \stackrel{form.}{=} 100 + 10 \times \frac{b+a}{2} + 3\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{x} \times f_X(x)\, dx \\ &= 100 + 10 \times \frac{2.5+0.5}{2} + 3\int_{0.5}^{2.5} \sqrt{x} \times \frac{1}{2}\, dx = 100 + 10 \times 1.5 + 3 \times \left.\frac{x^{1.5}}{2 \times 1.5}\right|_{0.5}^{2.5} \\ &= 115 + (2.5^{1.5} - 0.5^{1.5}) \simeq 118.599. \end{aligned}$$

[Obs.: $E(100+10X+3\sqrt{X}) \neq 100 + 10\,E(X) + 3\sqrt{E(X)} = 115 + 3 \times 1.5^{0.5} \simeq 118.674.$]

4. Assuma que, à saída da linha de produção, a espessura das soleiras de pedra (com geometria adequada ao encosto do caixilho e à drenagem das águas) segue uma distribuição normal com valor esperado igual a 30 mm e desvio padrão igual a 2 mm. **(1.5)**

Qual é o valor da espessura das soleiras de pedra à saída da linha de produção que não é excedido em 97.5% dos casos?

- **V.a. e distribuição**

  X = espessura da soleira de pedra...

  $X \sim \text{normal}(\mu = 30, \sigma^2 = 2^2)$

  $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \text{normal}(0,1)$

- **Quantil pedido**

$$\xi \quad : \quad P(X \leq \xi) = 0.975 \Leftrightarrow P\left(Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{\xi-\mu}{\sigma}\right) = 0.975 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{\xi-\mu}{\sigma}\right) = 0.975 \Leftrightarrow \frac{\xi-\mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(0.975)$$

$$\xi = \mu + \sigma \times \Phi^{-1}(0.975) = \stackrel{tabelas, calc.}{=} 30 + 2 \times 1.9600 = 33.92.$$

[Alternativamente, poderia recorrer-se ao resultado do Exercício 4.66 da página 169 do livro de PE da IST Press: $F_X^{-1}(0.975) = \mu + \sigma \times \Phi^{-1}(0.975) \stackrel{tabelas, calc.}{=} 30 + 2 \times 1.9600 = 33.92.$]