CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
LEIC-T, LEE, LETI, LEGI - CDI-I - 1 SEM. 2024/25

1. Primitivas

(1) Determine uma primitiva das seguintes funções:

1) $(x+\sqrt{x})^2$
2) $\sqrt[3]{1-x}$
3) $\cos x \operatorname{sen}^4 x$
4) $\frac{1}{x \ln x}$
5) e^{e^x+x}
6) $\operatorname{sen}^2(x)$
7) $\frac{1}{x^2}$
8) $\frac{xe^{-x^2}}{1+e^{-x^2}}$
9) $\operatorname{tg}(x)$
10) $\frac{1}{(1+x^2)\operatorname{arctg}^2(x)}$
11) 2^x
12) $\operatorname{tg}^2(x)$
13) $e^{x+1}\cos(e^x)$
14) $\frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}$
15) $\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$
16) $\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}$
17) $\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}$
18) $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$
19) $|x|$
20) $\frac{e^x}{1+e^{2x}}$
21) $\frac{\operatorname{senh}(\pi x)}{\cosh(\pi x)}$
22) $x\operatorname{senh}(x^2)$
23) $\frac{\ln x}{x^3}$
24) $\operatorname{sen}(\ln x)$
25) $e^x \operatorname{sen} x$
26) $\operatorname{arcsen} x$
27) $x\sqrt{1+3x}$
28) $\ln(x^2+1)$
29) $e^{\cos x}\operatorname{sen} x$
30) $e^{\operatorname{sen}^2 x}\operatorname{sen}(2x)$
31) $\ln^2 x$
32) $\frac{1}{(x-1)(x-2)}$
33) $\frac{1}{x^2-1}$
34) $\frac{1}{x^2+x+1}$
35) $\frac{x^2}{1+x^6}$
36) $\frac{1+x}{1-x^4}$
37) $\frac{x^4-x+1}{x^3-x^2}$
38) $\frac{x^2-x+2}{x^2-2x+1}$
39) $\frac{1}{x\sqrt{1+2x}}$
40) $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$
41) $\frac{e^{2x}}{(e^{2x}-1)(1+e^x)}$
42) $\frac{2x}{(x^2-1)(x+1)}$
43) $\frac{2x+1}{x^3-3x^2+3x-1}$
44) $\frac{\ln x+1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$
45) $\sqrt{1-x^2}$
46) $x\operatorname{arctg} x$
47) $(x^2+1)\cos x$
48) $\frac{8}{\operatorname{tg} x(1+\operatorname{sen}^2 x)}$
49) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}(1+\sqrt[3]{x^4})}$
50) $\frac{\cos x}{4+\operatorname{sen}^2 x}$
51) $\frac{1}{2+\operatorname{tg} x}$

(2) Mostre que $f,g:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ definidas por

$$f(x)=\frac{|x|+\operatorname{sen}^2 x}{x} \quad \text{e} \quad g(x)=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x}$$

têm a mesma derivada. O que pode concluir sobre $f-g$?

(3) Mostre que a substituição $t = \operatorname{tg}(x/2)$ é tal que

$$\cos x = \frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad \operatorname{sen} x = \frac{2t}{t^2+1}.$$

(4) Calcule uma primitiva de

$$\text{a)} \quad \frac{\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x} \qquad \text{b)} \quad \frac{1}{1+\operatorname{sen} x + \cos x}$$

(5) Determine a expressão de $y = y(x)$, sabendo que

(a) $y' = x/(1+4x^2), \quad y(1) = 2$

(b) $yy' = x, \quad y(3) = -2$

(c) $y' = 2e^{-y}x, \quad y(0) = 1$

(d) $y' = xy^3/\sqrt{1+x^2}, \quad y(0) = -1$

(6) Determine todas as soluções de $y' = 1 - y$.

(7) Determine todas as soluções de $y' = y - y^2$.

2. Integração

(1) Seja $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Diga, justificando, se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa.

(a) Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, existe uma partição P do intervalo $[-1,1]$ tal que

$$U(f,P) - L(f,P) < \frac{1}{n}.$$

(b) Se f é contínua em $]-1,1[$, então é integrável em $[-1,1]$.

(c) Se f^2 é integrável, então f é integrável.

(2) Sejam $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ funções contínuas. Mostre que:

(a) se existe $c \in]0,1[$ com $f(c) > 0$ e $f \geq 0$, então $\int_0^1 f(x)dx > 0$.

(b) se $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx$, então existe $c \in [0,1]$ com $f(c) = g(c)$.

(c) se $\int_0^1 f(x)dx = 1/2$, então existe $c \in [0,1]$ com $f(c) = c$.

(3) Determine as derivadas das funções seguintes:

$$\text{a)} \int_x^{2\pi} \cos(t^2)dt \qquad \text{b)} \int_x^{x^2} e^{-t^2}dt \qquad \text{c)} \int_1^{x^2} x\cos(\sqrt{t})dt$$

(4) Mostre que se f é uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ satisfazendo

$$\int_0^x f(t)dt = xf(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

então f é uma função constante.

(5) Calcule os limites:

$$\text{a)} \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \operatorname{sen} t^3 dt}{x^4}, \qquad \text{b)} \lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{x^2} te^{\sqrt{t}}dt}{\int_0^{x^3}(e^{\sqrt[3]{t}}-1)}$$

(6) Calcule o valor dos integrais:

$$\text{a)} \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} dx \qquad \text{b)} \int_{0}^{\pi/2} \operatorname{sen} x \cos x dx \qquad \text{c)} \int_{-1}^{1} \frac{3 \operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2} dx$$

$$\text{d)} \int_{-1}^{0} \frac{x}{e^x} dx \qquad \text{e)} \int_{0}^{1} \frac{1}{(x+1)^2} \operatorname{arctg} x dx \qquad \text{f)} \int_{1/2}^{3/2} \frac{1}{\sqrt{x}(1+4x)} dx$$

$$\text{g)} \int_{1}^{\sqrt{e}} \frac{\ln x + 1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx \qquad \text{h)} \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{1}{e^x - e^{-x}} dx \qquad \text{i)} \int_{-1}^{0} x \operatorname{arctg}(x^2) dx$$

(7) Sendo

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} e^{\frac{t^2+1}{t}} dt, \quad x > 0,$$

mostre que $F(1/x) = -F(x)$.

(8) Calcule a área limitada pelas curvas seguintes:

$$\text{a)}\ y = 4 - x^2,\ y = |x| - 2, \qquad \text{b)}\ y = \sqrt[3]{x},\ y = \sqrt{x}.$$

(9) Calcule a área das seguintes regiões do plano:

i) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{2} \leq y \leq x^2,\ y \leq x\right\}$

ii) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 0, y \geq x, y \geq x^2, y \leq 4x\}$

iii) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq y \leq (1-x) \operatorname{arctg} x\}$