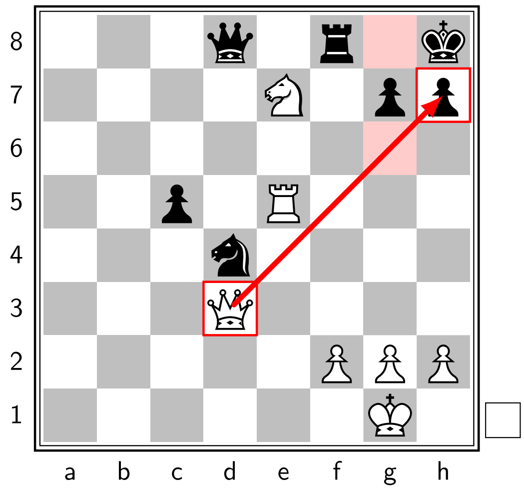
Cálculo Diferencial e Integral I
Texto de apoio às aulas práticas

Amélia Bastos, António Bravo

2018



Princípio de indução matemática. O axioma do supremo e suas consequências

Exercícios resolvidos

1. Recorrendo ao princípio de indução matemática, verifique que

$$\sum_{k=1}^{n} k(3k-1) = n^2(n+1)\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

.

Resolução. Pretende-se mostrar por indução que $\sum\limits_{k=1}^{n} k(3k-1) = n^2(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $n=1$, tem-se $\sum\limits_{k=1}^{1} k(3k-1) = 1^2(1+1) \Leftrightarrow 2 = 2$ e a base da indução uma proposição verdadeira.
Seja $m \in \mathbb{N}$, pretende-se agora mostrar que

$$\sum_{k=1}^{m} k(3k-1) = m^2(m+1) \Rightarrow \sum_{k=1}^{m+1} k(3k-1) = (m+1)^2(m+2).$$

Ora

$$\sum_{k=1}^{m+1} k(3k-1) = \sum_{k=1}^{m} k(3k-1) + (m+1)(3(m+1)-1)$$

vindo da hipótese de indução

$$\sum_{k=1}^{m+1} k(3k-1) = m^2(m+1) + (m+1)(3(m+1)-1) = (m+1)(m^2+3m+2) = (m+1)^2(m+2)$$

Assim a proposição é verdadeira para todo o $n \in \mathbb{N}$.

2. Considere o conjunto $A = \{u_n : \ n \in \mathbb{N}\}$, onde $u_n = \frac{2n+3}{n+1}$. Indique, caso existam, o supremo, o infimo, o máximo e o mínimo do conjunto A.

Resolução.
A sucessão $u_n = \frac{2n+3}{n+1} = 2 + \frac{1}{n+1}$ é uma sucessão estritamente decrescente, pois a sucessão $n+1$ é estritamente crescente. Como a sucessão u_n é uma sucessão de termos positivos, a sucessão u_n é uma sucessão limitada $0 < u_n \leq u_1$. Uma vez que é monótona, a sucessão u_n é convergente sendo $\lim u_n = 2$. Assim o conjunto A é majorado, minorado e não vazio, concluindo-se do axioma do supremo que existe o

supremo e infimo respetivamente $supA = u_1 = 5/2$ e o $infA = \lim u_n = 2$ (o limite de uma sucessão limitada e decrescente é o infimo do conjunto dos seus termos). Tem-se $supA \in A$ e existe máximo de A ($maxA = 5/2$). Como $infA \notin A$ uma vez que a sucessão u_n é estritamente decrescente, não existe mínimo de A.

3. Considere o conjunto $B = \{u_n : \; n \in \mathbb{N}\}$, onde $u_n = 1 + \dfrac{\text{sen}(n\pi/2)}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$. Indique, caso existam em $\mathbb{R}$, o supremo, ínfimo, máximo e mínimo do conjunto B.

Resolução.

Tem-se

$$u_{4n} = u_{4n-2} = 1 \;, \; u_{4n-1} = 1 + \frac{-1}{4n-1} \text{ e } u_{4n-3} = 1 + \frac{1}{4n-3}$$

Como as subsucessões indicadas contêm todos os termos da sucessão u_n, sendo u_{4n-1} crescente convergente para 1 e u_{4n-3} decrescente convergente para 1 resulta que, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$,

$$u_3 = 2/3 \le u_n \le 2 = u_1$$

Então

$$\sup B = \max B = 2 \text{ e } \inf B = \min B = 2/3$$

4. Recorrendo ao método de indução matemática, mostre que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, o natural $2^{2n} + 2$ é divisível por 3.

Resolução. Pretende-se provar que $2^{2n} + 2 = 3k$ para algum $k \in \mathbb{Z}$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Tem-se para $n = 1$,

$$2^2 + 2 = 6 \Rightarrow k = 2 \in \mathbb{Z}$$

e a base da indução é uma proposição verdadeira. Seja $m \in \mathbb{N}$, pretende-se mostrar que

$$2^{2m} + 2 = 3k \Rightarrow 2^{2(m+1)} + 2 = 3k' \qquad k, k' \in \mathbb{Z}\,.$$

Tem-se

$$2^{2(m+1)}+2 = 4\,.2^{2m}+2 = (3+1)\,2^{2m}+2 = (2^{2m}+2)+(3\,.2^{2m}) = 3(k+2^{2m}) \Rightarrow k' = k+2^{2m} \in \mathbb{Z}$$

Logo o passo indutivo é verdadeiro e a proposição é verdadeira para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Sucessões reais

Exercícios resolvidos

1. Considere a sucessão de termos positivos

$$u_1 = 3, \qquad u_{n+1} = \frac{3(1+u_n)}{3+u_n} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

i) Mostre por indução matemática que sucessão u_n é monótona.

ii) A sucessão u_n é limitada? Justifique.

iii) Sendo v_n uma sucessão convergente de termos em $[0, 1[$ a sucessão $w_n = u_n + v_n$ é convergente e tem limite em $[\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}[$? Justifique.

Resolução.

i) Mostre-se que $u_{n+1} - u_n \leq 0$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$, $u_2 - u_1 = \frac{3(1+u_1)}{3+u_1} - u_1 = \frac{12}{6} - 3 \leq 0$. A base da indução é, portanto, verdadeira.
Para um valor fixo $m \in \mathbb{N}$ mostre-se que se $u_{m+1} - u_m \leq 0$ então $u_{m+2} - u_{m+1} \leq 0$.
Da definição da sucessão, tem-se

$$u_{m+2} - u_{m+1} = \frac{3(1+u_{m+1})}{3+u_{m+1}} - \frac{3(1+u_m)}{3+u_m} = 6\frac{u_{m+1} - u_m}{(3+u_m)(3+u_{m+1})}$$

De $u_{m+2} - u_{m+1} \leq 0$e sendo a sucessão u_n de termos positivos, tem-se

$$\frac{u_{m+1} - u_m}{(3+u_m)(3+u_{m+1})} \leq 0$$

vindo $u_{m+2} - u_{m+1} \leq 0$.
Assim pelo princípio de indução matemática a sucessão u_n é decrescente.

ii) Da alínea anterior, como u_n é decrescente, a sucessão é limitada superiormente e u_1 um dos majorantes do conjunto dos seus termos. Sendo u_n de termos positivos é também minorada e concluindo-se que a sucessão u_n é uma sucessão limitada.

iii) A sucessão u_n é convergente pois é uma sucessão monótona e limitada. Seja $u \in \mathbb{R}$ o limite da sucessão u_n. Como u_{n+1}é uma subsucessão de u_n, . Aplicando limites a ambos os termos da igualdade que define, por recorrência, u_n, tem-se, visto que as sucessões envolvidas são convergentes, $\lim u_{n+1} = u$ $u_{n+1} \to u$

$$u = \frac{3(1+u)}{3+u} \Leftrightarrow u^2 = 3 \Leftrightarrow u = \pm\sqrt{3}$$

Como $u_n > 0$ o seu limite não pode ser negativo vindo $u = \sqrt{3}$. A sucessão $w_n = u_n + v_n$ é convergente, mas o valor do seu limite pode não pertencer ao conjunto $[\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}[$. A sucessão $v_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ é uma sucessão convergente de termos em $[0,1[$ mas a sucessão $w_n = u_n + v_n$ é convergente para $1+\sqrt{3}$.

2. Determine em $\overline{\mathbb{R}}$, se existirem , os limites das sucessões

$$x_n = \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{(n!)^3}}\,; \qquad y_n = \left(\frac{a}{2+|a|}\right)^n, \qquad a \in \mathbb{R}\,.$$

Resolução.

2.

$$\lim x_n = \lim \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{(n!)^3}} = \lim \frac{\dfrac{(3n+3)!}{((n+1)!)^3}}{\dfrac{(3n)!}{(n!)^3}} =$$

$$\lim \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3} = 3^3 \lim \frac{(1+2/3n)(1+1/3n)}{(1+1/n)(1+1/n)} = 27\,.$$

$$\lim y_n = \lim \left(\frac{a}{2+|a|}\right)^n \to 0.$$

$$\text{uma vez que } \left|\frac{a}{2+|a|}\right| < 1\,.$$

3. Seja a_n uma sucessão monótona. A sucessão

$$b_n = \operatorname{arctg} a_n + \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$$

é uma sucessão convergente? Justifique.

Resolução.

Seja a_n uma sucessão monótona. A sucessão $\operatorname{arctg} a_n$ é monótona uma vez que a função arctg é uma função estritamente crescente no seu domínio. A sucessão $\operatorname{arctg} a_n$ é igualmente limitada uma vez que a função arctg é uma função limitada no seu domínio. Assim a sucessão $\operatorname{arctg} a_n$ é convergente. Por outro lado a sucessão $\left(1 + \frac{1}{z_n}\right)^{z_n}$, quando $z_n \to +\infty$ é uma sucessão convergente, vindo

$$\lim \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = \left(\lim \left(1 + \frac{1}{n/2}\right)^{n/2}\right)^2 = e^2$$

Conclui-se que a sucessão

$$b_n = \operatorname{arctg} a_n + \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$$

é uma sucessão convergente visto ser a soma de duas sucessões convergentes

4. Considere a sucessão de termos positivos

$$u_1 = 2, \qquad u_{n+1} = \frac{1}{2 + u_n} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

i) A sucessão u_n é limitada? Justifique.

ii) Mostre que existe $c \in \mathbb{R}^+$ tal que $0 < c < 1$ e $|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq c|u_{n+1} - u_n|$, $n \in \mathbb{N}$ (i.e. a sucessão é contrativa).

iii) Sendo v_n uma sucessão convergente de termos em $[0, 1[$ a sucessão $w_n = u_n + v_n$ é convergente e tem limite em $[-1 + \sqrt{2}, \sqrt{2}[$? Justifique.

Resolução.

i) Como a sucessão $u_n > 0$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, tem-se $2 + u_n > 2$ ou seja $\frac{1}{2+u_n} < 1/2 < 1$. Pretende-se mostrar que $u_n \leq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$
Para $n = 1$, $u_1 = 2$. A base da indução é, portanto, verdadeira. Para um valor fixo $m \in \mathbb{N}$ mostre-se que se $u_m \leq 2$ então $u_{m+1} \leq 2$.

De facto

$$u_{m+1} = \frac{1}{2 + u_m} \leq 2\,.$$

A sucessão u_n é limitada pois $0 < u_n \leq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii)

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| = \left|\frac{1}{2 + u_{n+1}} - \frac{1}{2 + u_n}\right| = \frac{1}{(2 + u_{n+1})(2 + u_n)}|u_{n+1} - u_n|$$

Como a sucessão u_n é de termos positivos

$$\frac{1}{2 + u_n} < \frac{1}{2}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Assim existe $c = 1/4$ tal que para qualquer $n \in \mathbb{N}$

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| =\leq c|u_{n+1} - u_n|$$

i.e. a sucessão é contrativa.

iii) Da alínea anterior, como a sucessão u_n é contrativa a sucessão u_n é convergente. Seja $u \in \mathbb{R}$ o limite da sucessão u_n, como u_{n+1} é uma subsucessão de u_n, também $\lim u_{n+1} = u$. Aplicando limites à igualdade que define, por recorrência, u_n, tem-se, visto que todas as sucessões envolvidas são convergentes,

$$u = \frac{1}{2+u} \Leftrightarrow 2u + u^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow u = -1 \pm \sqrt{2}$$

Como $u_n > 0$, o limite não pode ser negativo e $u = -1+\sqrt{2}$. Assim a sucessão $w_n = u_n + v_n$ é convergente, mas o valor do seu limite pode não pertencer ao conjunto $[-1+\sqrt{2}, \sqrt{2}[$. A sucessão $v_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ é uma sucessão convergente de termos em $[0,1[$ mas a sucessão $w_n = u_n + v_n$ é convergente para $\sqrt{2}$.

5. Considere a sucessão convergente $v_n = x_n + y_n$, $n \in \mathbb{N}$ em que

$$x_n = \frac{n\,2^n + 4^{n+1}}{n^3 3^n + 2^{2n-1}} + \frac{(2n^2+1)n!}{5^n + (n+2)!} + \sqrt[n]{\frac{(n+1)!}{n!+1}}$$

e

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}\left(y_n + \frac{4}{y_n}\right) \;,\; y_1 = 1$$

Determine o limite da sucessão v_n

Resolução.

Tem-se

$$\frac{n\,2^n + 4^{n+1}}{n^3 3^n + 2^{2n-1}} = \frac{n/2^n + 4}{n^3/(4/3)^n + 1/2} \to \frac{0+4}{0+1/2} = 8\,,$$

$$\frac{(2n^2+1)n!}{5^n + (n+2)!} = 2\frac{1 + 1/(2n^2)}{(1+2/n)(1+1/n)}\frac{1}{5^n/(n+2)! + 1} \to 2\frac{1}{0+1} = 2$$

e

$$\frac{\dfrac{(n+2)!}{(n+1)!+1}}{\dfrac{(n+1)!}{n!+1}} = \frac{(n+2)!}{(n+1)!}\frac{n!+1}{(n+1)!+1} = (n+2)\frac{n!+1}{(n+1)!+1}$$

$$\frac{1+2n^{-1}}{1+n^{-1}}\frac{1+\frac{1}{n!}}{1+\frac{1}{(n+1)!}} \to \frac{1+0}{1+0}.\frac{1+0}{1+0} = 1 \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{(n+2)!}{n!+1}} \to 1$$

Assim $\lim x_n = 11$. Sendo $a \in \mathbb{R}$ o limite de y_n, como y_{n+1} é uma subsucessão de y_n, $\lim y_{n+1} = a$. Aplicando limites a ambos os termos da igualdade que define, por recorrência, y_n, tem-se, uma vez que todas as sucessões envolvidas são convergentes,

$$a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{4}{a}\right) \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = \pm 2$$

Como $y_1 = 1$ tem-se $y_n > 0$. y_n é, uma sucessão de termos positivos, assim, o seu limite não pode ser negativo vindo $a = 2$. Conclui-se, assim, que $\lim v_n = 13$

Continuidade e diferenciabilidade de funções reais

Exercícios resolvidos

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\, e^{-\frac{1}{|x|}} , & \text{se } x \neq 0; \\ 1 , & \text{se } x = 0\,. \end{cases}$$

i) A função f é diferenciável em $x = 0$? Justifique.

ii) Defina a função derivada de f.

iii) Indique os intervalos de monotonia e analise a existência de extremos da função f.

Resolução.

i) Tem-se

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\, e^{-\frac{1}{|x|}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}}$$

vindo da regra de Cauchy

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} = 0$$

Assim f não é contínua em 0 pois $f(0^+) \neq 1$, e consequentemente também não é diferenciável em $x = 0$.

ii) A função f é diferenciável em todos os pontos $x \neq 0$ pois coincide numa vizinhança de qualquer desses pontos com o produto ou a composta de funções diferenciáveis, a função exponencial e funções polinomiais. Assim sendo, podem aplicar-se as regras de derivação e obtém-se : $f' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x} + 1\right)}{x^2} , & \text{se } x < 0. \\ \dfrac{e^{-\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x} - 1\right)}{x^2} , & \text{se } x > 0; \end{cases}$$

iii) f' é negativa em $]-\infty, -1[$, f é estritamente decrescente em $]-\infty, -1[$ e f' é positiva em $]-1, 0[$, f é estritamente crescente em $]-\infty, -1[$. Para $x \in]1, +\infty[$, f' é negativa, f é decrescente em $]1, +\infty[$ e para $x \in]0, 1[$, f' é positiva, f é crescente em $]0, 1[$. Tem-se $f'(\pm 1) = 0$, f é contínua em -1 e 1, concluindo-se que $f(-1)$ é mínimo local e $f(1)$ é máximo local.

2. Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os limites

$$\text{(i)}\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x+x-1}{\operatorname{sen} x}, \qquad \text{(ii)}\ \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Resolução. i)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+x-1}{\operatorname{sen} x}=2$$

uma vez que da regra de Cauchy

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x+x-1)'}{(\operatorname{sen} x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+1}{\cos x}=2$$

ii)

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

uma vez que da regra de Cauchy

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\ln\cos x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}-\frac{\operatorname{tg} x}{2x}=-1/2$$

3. A equação $x^4+3x^2-x=2$ tem solução em $[-1,0]$? A solução é única? Justifique.

Resolução. A função $f(x)=x^4+3x^2-x-2$ é contínua no intervalo $[-1,0]$ e

$f(-1)f(0)<0$. Como consequência do teorema de Bolzano, a função f uma vez que tem pelo menos um zero em $]-1,0[$, ou seja a equação $x^4+3x^2-x=2$ tem solução em $]-1,0[$. Mostre-se que a solução é única. Se assim não fosse, ao considerar que f tem dois zeros teria que existir pelo menos um zero da função f' em $]-1,0[$, o que é impossível pois $f'(0)<0$,$f'(-1)<0$ e f' é injetiva contínua em $]-1,0[$ $(f''>0)$.

4. Mostre para $x\in\mathbb{R}^+$ as desigualdades

$$1+\frac{3x}{2}+\frac{3x^2}{8}-\frac{x^3}{16}<(1+x)^{3/2}<1+\frac{3x}{2}+\frac{3x^2}{8}.$$

Resolução. Considere-se $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, $f(x)=(1+x)^{3/2}$

Do teorema de Taylor

$$f(x)=P_2(x)+R_2(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)x^2}{2!}+R_2(x)\,,\quad R_2(x)=\frac{f'''(c)x^3}{3!}\,,\quad c\in]0,x[\,,x\in\mathbb{R}^+$$

$$f'(x)=\frac{3}{2}(1+x)^{\frac{1}{2}}\,,\qquad f''(x)=\frac{3}{4}(1+x)^{\frac{-1}{2}}\,,\qquad f'''(x)=-\frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{3}{2}}\,.$$

Ora $f(0) = 1$, $f'(0) = 3/2$, $f''(0) = 3/4$

$$P_2(x) = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2\,, \qquad -\frac{x^3}{16} < R_2(x) < 0\,,$$

pois

$$\frac{f'''(c)}{6} = -\frac{1}{6}\frac{-3}{8}(1+c)^{-\frac{3}{2}} > -\frac{1}{16}\,, \qquad c \in]0, x[$$

donde

$$1 + \frac{3x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{x^3}{16} < (1+x)^{3/2} < 1 + \frac{3x}{2} + \frac{3x^2}{8}\,.$$

5. Tendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e a função derivada f' que é uma função contínua e estritamente decrescente conclua, justificando, se

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

. *Sugestão: Utilize o teorema de Lagrange em* $[x_2, 0]$, $x_2 \in \mathbb{R}^-$ *e em* $[0, x_1]$, $x_1 \in \mathbb{R}^+$.

Resolução. Sendo f' é uma função contínua e estritamente decrescente, tal que

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ existe $x_1 > 0$ em que $f(x_1) > f(0)$ ou seja $f(x_1) - f(0) > 0$. Aplicando o teorema de Lagrange a f no intervalo $[0, x_1]$, existe $c_1 \in]0, x_1[$ tal que

$$\frac{f(x_1) - f(0)}{x_1 - 0} = f'(c_1) > 0$$

Analogamente devido a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ existe $x_2 < 0$ em que $f(x_2) > f(0)$ ou seja $f(0) - f(x_1) < 0$. Então aplicando o teorema de Lagrange a f no intervalo $[x_2, 0]$, existe $c_2 \in]x_2, 0[$ tal que

$$\frac{f(0) - f(x_2)}{0 - x_2} = f'(c_2) < 0$$

Assim tem-se $c_2 < c_1$ e $f'(c_2) < f'(c_1)$ o que é absurdo pois f' é estritamente decrescente. Não é pois possível simultâneamente ter $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

6. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1-|x|}{1+|x|}\,.$$

i) A função f é diferenciável em $x = 0$? Justifique.

ii) Defina a função derivada de f.

iii) Indique os intervalos de monotonia e analise a existência de extremos da função f.

iv) Conclua se a função f tem inversa quando restrita a $[-4,-2]$ e determine, se existir, a derivada da função inversa em $f(-3)$.

Resolução.

i) A função f não é diferenciável em $x = 0$, pois $f'_e(0) \neq f'_d(0)$

$$f'_e(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{1+x}{1-x}-1}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2}{1-x} = 2$$

$$f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1-x}{1+x}-1}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-2}{1+x} = -2$$

ii) A função f é diferenciável em todos os pontos $x \neq 0$ pois coincide numa vizinhança de qualquer desses pontos com uma função racional, função diferenciável em todo o seu domínio. Podem aplicar-se as regras de derivação e obtém-se : $f' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{(1-x)^2}\,, & \text{se } x < 0. \\ \dfrac{-2}{(1+x)^2}\,, & \text{se } x > 0; \end{cases}$$

iii) Como f' é positiva em $]-\infty,0[$, f é estritamente crescente em $]-\infty,0[$. Para $x \in]0,+\infty[$, f' é negativa, f é estritamente decrescente em $]0,+\infty[$. A função f é contínua em 0 e $f(0) = 1$ é pois máximo local.

iv) Como f é estritamente crescente em $]-\infty,0[$, f é injetiva tendo a função f função inversa quando restrita a $[-4,-2]$. a função f é diferenciável em -3 e a função inversa de f, g, quando restrita a $[-4,-2]$ é diferenciável em $f(-3) = -\frac{1}{2}$. Tem-se $g'(-\frac{1}{2}) = \dfrac{1}{f'(-3)} = 8$.

7. Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os limites

$$\text{(i)} \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}, \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Resolução. i)

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = -\infty$$

uma vez que da regra de Cauchy

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0^-} -e^{-\frac{1}{x}} = -\infty$$

ii)

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}$$

uma vez que da regra de Cauchy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\ln\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\right)'}{\left(x^2\right)'} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{2x^2 \operatorname{sen} x} = -1/6$$

e

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x\cos x - \operatorname{sen} x)'}{(2x^2 \operatorname{sen} x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{-x \operatorname{sen} x}{4x \operatorname{sen} x + 2x^2 \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{4 + 2\cos x \frac{x}{\operatorname{sen} x}} = -1/6$$

8. A equação $x^4+5x^2-3x = 1$ tem solução em $[-1,0]$? A solução é única? Justifique.

Resolução. A função $f(x) = x^4 + 5x^2 - 3x - 1$ contínua no intervalo $[-1,0]$ é tal

que $f(-1)f(0) < 0$. Como consequência do teorema de Bolzano tem pelo menos um zero em $]-1,0[$, ou seja a equação $x^4 + 3x^2 - x = 2$ tem solução em $]-1,0[$. Mostre-se que a solução é única. Se assim não fosse, e se f tivesse dois zeros teria que existir pelo menos um zero da função f' em $]-1,0[$, o que é impossível pois $f'(0) < 0$, $f'(-1) < 0$ e f' é injetiva contínua em $]-1,0[$ $(f'' > 0)$.

9. Sendo $f :]-\infty, 0[\longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por:

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Escreva a fórmula de Taylor de 2º grau em potências de $x+1$, com resto de Lagrange, associado à função f.

Resolução. Dado que é a composta de arctg com uma função racional, a função f

é pelo menos 3 vezes diferenciável numa vizinhança do ponto -1.
O polinómio de Taylor de 2º grau, $p_2(x)$, em potências de $x+1$ associado à função f é:

$$P_2(x) = f(-1) + f'(-1)(x+1) + \frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2$$

com

$$f(-1) = -\frac{\pi}{4}\,,$$

$$f'(-1) = \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)'_{x=-1} = \left(\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}\right)_{x=-1} = \left(\frac{-1}{x^2+1}\right)_{x=-1} = -\frac{1}{2}\,,$$

$$f''(-1) = \left(-\frac{1}{1+x^2}\right)'_{x=-1} = \left(\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right)_{x=-1} = -\frac{1}{2}$$

vindo

$$P_2(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{(x+1)}{2} - \frac{(x+1)^2}{4}\,.$$

Quanto ao resto de Lagrange,

$$f'''(x) = \left(\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right)' = \frac{2(1-3x^2)}{(1+x^2)^3}$$

$$R_2(x) = \frac{2(1-3c^2)}{(1+c^2)^3}\frac{(x+1)^3}{3!} \qquad c \in]-1, x[$$

Tem-se assim para $x \in]-\infty, 0[$

$$f(x) = P_2(x) + R_2(x)\,.$$

O Integral de Riemann

Exercícios resolvidos

1. Determine o valor dos integrais

$$\text{(i)} \int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\,dx\,, \qquad \text{(ii)} \int_0^1 \frac{x^2-x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}\,dx\,.$$

Resolução.

i) Usando o método da integração por partes e fazendo $f' = \dfrac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}$ e $g = \ln x$ e consequentemente $f = 2\sqrt{1+\ln x}$, $g' = \frac{1}{x}$ tem-se

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\,dx = \Big[2\ln x\sqrt{1+\ln x}\Big]_1^e - \int_1^e \frac{2\sqrt{1+\ln x}}{x}\,dx =$$

$$= 2\ln e\sqrt{1+\ln e} - 2\ln 1\sqrt{1+\ln 1} - \int_1^e \frac{2\sqrt{1+\ln x}}{x}\,dx$$

$$= 2\sqrt{2} - \Big[4/3\sqrt{(1+\ln x)^3}\Big]_1^e = 2\sqrt{2} - 4/3\sqrt{(2)^3} + 4/3$$

$$= 2\sqrt{2} - 8/3\sqrt{2} + 4/3$$

ii) A função integranda é uma função racional que se decompõe em fracções simples

$$\int_0^1 \frac{x^2-x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}\,dx = A_1\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx + A_2\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx + \int_0^1 \frac{Bx+C}{x^2+1}\,dx$$

$$= A_1\left[\ln(x+1)\right]_0^1 + A_2\left[\frac{-1}{x+1}\right]_0^1 + B/2\left[\ln(x^2+1)\right]_0^1 + C\left[\operatorname{arctg} x\right]_0^1.$$

Pelo método dos coeficientes indeterminados obtêm-se as constantes A_1, A_2, B, C

$$x^2-x+1 = A_1(x+1)(x^2+1) + A_2(x^2+1) + (Bx+C)(x+1)^2$$

$$x^2-x+1 = (A_1+B)x^3 + (A_1+A_2+2B+C)x^2 + (A_1+B+2C)x + (A_1+A_2+C)$$

Tem-se $A_1 = B = 0$, $A_2 = 3/2$ $C = -1/2$ concluindo-se que:

$$\int_1^2 \frac{x^2-x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}\,dx = 3/4 + \pi/8.$$

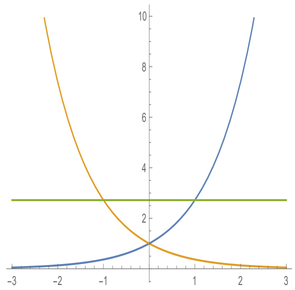
2. Determine a área da região plana limitada pelos gráficos das funções

$$y = e^x\,, \qquad\qquad y = e^{-x}\,, \qquad\qquad y = e\,.$$

Resolução. Esboçando a região plana limitada pelos gráficos das funções

$$y = e^x\,, \qquad\qquad y = e^{-x}\,, \qquad\qquad y = e\,.$$

obtém-se:



Determinados os valores correspondentes à intersecção das curvas, e tendo presente a simetria da região relativamente ao eixo das ordenadas, a área da região correspondente é

$$2\int_0^1 (e - e^x)\,dx = 2\,[e\,x - e^x]_0^1 = 2.$$

3. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \int_0^{x^2} t\ln(t^2+1)\,dt$$

i) Mostre que f é diferenciável e determine $f'(1)$.

ii) Determine $f(1)$, usando a substituição $t^2 = u$.

Resolução.

i) Aplicando o teorema fundamental do cálculo à função $F(x) = \int_0^x t\ln(t^2+1)\,dt$ tem-se que F é diferenciável, uma vez que a função integranda $t\ln(t^2+1)$ é uma função da classe $C(\mathbb{R})$. A função f é diferenciável pois é a composta de funções diferenciáveis $F(x)$ e x^2 sendo $f'(x) = 2x\,x^2\ln(x^4+1)$. Tem-se $f'(1) = \ln 2$.

ii)

$$f(1) = \int_0^1 t\ln(t^2+1)\,dt = \int_{0^2}^{1^2} \sqrt{u}\frac{1}{2\sqrt{u}}\ln(u+1)\,du = \frac{1}{2}\int_0^1 \ln(u+1)\,du\,,$$

Já que $t = \sqrt{u} = \varphi(u)$.

Primitivando por partes a função $\ln(x+1)$

$$P(\ln(x+1)) = x\,\ln(x+1) - P(\frac{x}{x+1}) = x\,\ln(x+1) - P(1 + \frac{-1}{x+1}) =$$

$$= x\,\ln(x+1) - P(1) + P(\frac{1}{x+1}) = x\,\ln(x+1) - x + \ln(x+1)$$

Da fórmula de Barrow obtém-se

$$f(1) = \int_0^1 t\ln(t^2+1)\,dt \; = \frac{1}{2}\left[(u+1)\ln(u+1) - u\right]_0^1 = \ln 2\,.$$

4. Considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \int_{x+1}^{x^4} e^{t^2}\,dt\,.$$

Mostre que

$$4g'(0) - g'(-1) + g(0) + g(-1) = 1\,.$$

Resolução. Aplicando o teorema fundamental do cálculo à função $F(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt$

tem-se que F é diferenciável, uma vez que a função e^{x^2} é uma função da classe $C(\mathbb{R})$, $g(x) = F(x^4) - F(x+1)$ é uma função diferenciável resultante da soma e composição de funções diferenciáveis e $g'(x) = 4\,x^3 e^{x^8} - e^{(x+1)^2}$ obtendo-se $g(0) = -F(1)$, $g(-1) = F(1)$, $g'(0) = -e$ e $g'(-1) = 4e - 1$ ou seja

$$4g'(0) - g'(-1) + g(0) + g(-1) = 1\,.$$

5. Determine o valor dos integrais

(i) $\displaystyle\int_1^e \frac{x^2\ln x + \ln x}{x^3+x}\,dx\,,$ (ii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+x-1}{(x^2+2)(x-3)}\,dx$ (iii) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)dx\,.$

Resolução.

i) Dado que $(\ln^2 x)' = 2\frac{\ln x}{x}$, a função integranda, $\dfrac{x^2\ln x + \ln x}{x^3+x} = \dfrac{\ln x}{x}$ é imediatamente primitivável e, usando a fórmula de Barrow, tem-se

$$\int_1^e \frac{x^2\ln x + \ln x}{x^3+x}\,dx = \int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_1^e = \frac{\ln^2 e}{2} - 0$$

ii) A função integranda é uma função racional que se decompõe em fracções simples

$$\int_0^1 \frac{x^2+x-1}{(x^2+2)(x-3)}\,dx = A\int_0^1 \frac{1}{x-3}\,dx + \int_0^1 \frac{Bx+C}{x^2+2}\,dx$$

$$= A\left[\ln|x-3|\right]_0^1 + B/2\left[\ln(x^2+2)\right]_0^1 + C/\sqrt{2}\left[\operatorname{arctg}(x/\sqrt{2})\right]_0^1.$$

Pelo método dos coeficientes indeterminados obtêm-se as constantes A, B, C

$$x^2-x+1 = A(x^2+2) + (Bx+C)(x-3)$$

$$x^2+x-1 = (A+B)x^2 + (-3B+C)x + (2A-3C)$$

Tem-se $A=1, B=0, C=1$ concluindo-se que:

$$\int_1^2 \frac{x^2-x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}\,dx = \ln(2/3) + 1/\sqrt{2}\operatorname{arctg}(1/\sqrt{2}).$$

iii) Usando o método de integração por partes e fazendo $u'=1$ e $v=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ vem $u=x$, $v'=\frac{-1}{x^2+1}$ e

$$\int_1^{\sqrt{3}} f(x)dx = \left[x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right]_1^{\sqrt{3}} - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{-x}{1+x^2}dx$$

$$= (\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg} 1) + \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x}{1+x^2}dx =$$

$$= \left(\sqrt{3}\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right) + \left[\frac{\ln(1+x^2)}{2}\right]_1^{\sqrt{3}} =$$

$$= \left(\sqrt{3}\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}(\ln 4 - \ln 2) = \frac{\pi}{12}\left(2\sqrt{3}-3\right) + \ln\sqrt{2}$$

6. Determine a área da região plana

$$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0 \le x \le e-1 \wedge y \le 2 \wedge \ln(x+1) \le y \le 2x\}.$$

Resolução. Determinando a área correspondente, obtém-se

$$\int_0^1 2x - \ln(x+1)\,dx + \int_1^{e-1} 2 - \ln(x+1)\,dx =$$

$$= \left[x^2\right]_0^1 + [2x]_1^{e-1} + \int_0^{e-1} \ln(x+1)\,dx = 1 + 2e - 4 - \int_0^{e-1} \ln(x+1)\,dx$$

Primitivando por partes a função $\ln(x+1)$

$$P(\ln(x+1)) = x\,\ln(x+1) - P(\frac{x}{x+1}) = x\,\ln(x+1) - P(1+\frac{-1}{x+1}) =$$

$$= x\,\ln(x+1) - P(1) + P(\frac{1}{x+1}) = x\,\ln(x+1) - x + \ln(x+1)$$

Da fórmula de Barrow obtém-se

$$\int_0^{e-1} \ln(x+1)\,dx = [x\,\ln(x+1) - x + \ln(x+1)]_0^{e-1} = 1$$

A área é $2(e-1)$.

7. Considere a função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \int_1^x \sqrt{t}\,e^{\sqrt{t}-x}\,dt\,.$$

i) Mostre que f é diferenciável e determine $f'(1)$.

ii) Determine $f(2)$, usando a substituição $\sqrt{t} = u$.

Resolução.

i) Aplicando o teorema fundamental do cálculo à função $F(x) = \int_1^x \sqrt{t}\,e^{\sqrt{t}}\,dt$ tem-se que F é diferenciável, uma vez que a função integranda $\sqrt{t}\,e^{\sqrt{t}}$ é uma função da classe $C(\mathbb{R}_0^+)$. A função f é pois diferenciável visto ser o produto das funções diferenciáveis $F(x)$ e e^{-x} e $f'(x) = e^{-x}(\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}} - F(x))$ obtendo-se $f'(1) = 1$.

ii)

$$f(2) = \int_1^2 \sqrt{t}\,e^{\sqrt{t}-2}\,dt \;=\; \int_{\sqrt{1}}^{\sqrt{2}} u\,e^{u-2} 2u\,du = \;2e^{-2}\int_1^{\sqrt{2}} u^2\,e^u\,du\,.$$

Primitivando duas vezes por partes a função x^2e^x

$$P(x^2e^x) = x^2\,e^x - P(2xe^x) = x^2\,e^x - 2xe^x - P(2e^x) = x^2\,e^x - 2xe^x - 2e^x$$

Da fórmula de Barrow obtém-se

$$f(2) = \int_1^2 \sqrt{t}\,e^{\sqrt{t}-2}\,dt \;= 2e^{-2}\left[e^u(u^2-2u+2)\right]_1^{\sqrt{2}} = 2e^{-2}(e^{\sqrt{2}}(4-2\sqrt{2})-e)\,.$$

Séries Numéricas. Séries de potências e séries de Taylor

Exercícios resolvidos

1. Analise a natureza das séries numéricas.

$$\text{(i)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+2}{\sqrt[3]{n^5+n}}\,, \qquad \text{(ii)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2+3^n}\,, \qquad \text{(iii)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \operatorname{sen} n}{n^4+1}\,.$$

Resolução.

i) As sucessões $a_n = \frac{n+2}{\sqrt[3]{n^5+n}}$ e $b_n = \frac{n}{\sqrt[3]{n^5}} = \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ têm o mesmo comportamento quando $n \to +\infty$. Assim uma vez que

$$\lim \frac{\frac{n+2}{\sqrt[3]{n^5+n}}}{\frac{n}{\sqrt[3]{n^5}}} = \lim \left(1+\frac{2}{n}\right)\sqrt[3]{\frac{n^5}{n^5+n}} = \lim \frac{1+\frac{2}{n}}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^4}}} = 1 \in \mathbb{R}^+,$$

a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+2}{\sqrt[3]{n^5+n}}$$

é uma série divergente pelo critério de comparação, já que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é uma série divergente, pois é uma série de Dirichlet, do tipo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, com $p \leq 1$.

ii) Tem-se

$$\frac{n}{3^n+n^2} < \frac{n}{3^n}$$

Aplicando o critério geral de comparação às séries $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$, com $a_n = \dfrac{n}{3^n+n^2}$ e $b_n = \dfrac{n}{3^n}$ Ora uma vez que do critério de D'Alembert,

$$\lim \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim \frac{n+1}{n}.\frac{3^n}{3^{n+1}} = \lim \frac{(1+\frac{1}{n})}{3} = 1/3 < 1\,,$$

a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente. Conclui-se assim do critério geral de comparação que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2+3^n}$$

é convergente.

iii) Tem-se
$$\left|\frac{n \operatorname{sen} n}{n^4+1}\right| < \frac{n}{n^4}$$
e a série
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$
é uma série de Dirichlet convergente.
Conclui-se assim do critério geral de comparação que a série
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{n \operatorname{sen} n}{n^4+1}\right|$$
é uma série convergente. Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{n \operatorname{sen} n}{n^4+1}\right|$ é uma série convergente então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \operatorname{sen} n}{n^4+1}$ é também convergente.

2. Indique o intervalo aberto de $\mathbb{R}$ em que é absolutamente convergente a série de potências
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n(1-3x)^{2n}}{n(n-1)}.$$

Resolução. Tem-se para o raio de convergência da série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} a_n\, x^n$

$$r = \lim |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \lim \frac{\frac{1}{n(n-1)}}{\frac{1}{(n+1)n}} = 1$$

Assim a série converge absolutamente se $(1-3x)^2 < 1$ i.e $1 - 6x + 9x^2 < 1$
ou ainda se $0 < x < 2/3$.

3. Sendo $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série de termos positivos analise a natureza da série
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+a_n}.$$
Resolução. Tem-se uma vez que $a_n > 0$

$$\frac{1}{n^2 + a_n} < \frac{1}{n^2}$$

Aplicando o critério geral de comparação às séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \, ,$$

com $a_n = \dfrac{1}{n^2 + a_n}$ e $b_n = \dfrac{1}{n^2}$.

Conclui-se assim do critério geral de comparação que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + a_n} \, .$$

é convergente, pois a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$é uma série de Dirichlet, do tipo $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$, com $p > 1$.

4. Considerando que

$$(n+1)x^{n+1} - nx^n = (x-1)nx^n + x^{n+1}$$

determine para $x \in]-1, 1[$ e $x \neq 0$ a soma da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n \, .$$

Resolução. Seja

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)x^{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n &= (x-1)\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n + \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n+1} \\
&= (x-1)\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n + \frac{x^2}{1-x}
\end{aligned}$$

Por outro lado, uma vez que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)x^{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \sum_{m=2}^{+\infty} mx^m - \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = -x$$

obtém-se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = -\frac{1}{x-1}\left(x + \frac{x^2}{1-x}\right)$$

vindo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}\,.$$

5. Determine $a \in \mathbb{N}$, tal que

$$\sum_{n=a}^{+\infty} \frac{1}{2^{-2n+1}\,9^{n-1}} = \frac{18}{5}\,.$$

Resolução. É uma série geométrica convergente de razão $\frac{4}{9} < 1$ cuja soma é dada por

$$\frac{9}{2}\sum_{n=a}^{+\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n = \frac{9}{2}\,.\frac{\left(\frac{4}{9}\right)^a}{1-\frac{4}{9}}\,.$$

Tem-se

$$\frac{18}{5}\left(\frac{4}{9}\right)^{a-1} = \frac{18}{5}\,.$$

$a = 1$.

6.

(i) Determine o intervalo de $\mathbb{R}$ onde a série de potências:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{(2n+1)(2n+3)}$$

é absolutamente convergente.

(ii) Indique a soma da série em $x = 1$.

Resolução.

i) Tem-se para o raio de convergência

$$r = \lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim \frac{\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}}{\frac{1}{(2n+3)(2n+5)}} = \lim \frac{2n+5}{2n+1} = 1\,.$$

Assim série converge absolutamente se $|x-2| < 1$ i.e $1 < x < 3$.
Para $x = 1$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right)$$

é uma série de Mengoli convergente, pois a sucessão $u_n = \dfrac{1}{2n+1}$ é convergente.
Para $x = 3$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)} \right|$$

é uma série absolutamente convergente.

ii) Sendo uma série de Mengoli convergente a sua soma é $1/6$, uma vez que, considerando a sucessão das somas parciais S_m, tem-se

$$S_m = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2m+3} \right) \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{6}$$

7. Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ uma série de termos positivos divergente e $s_n = b_1 + \ldots + b_n$ a sua sucessão das somas parciais. Conclua, justificando, qual a natureza da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{s_n^2}$$

Sugestão: Mostre que $\dfrac{b_n}{s_n^2} \leq \dfrac{1}{s_{n-1}} - \dfrac{1}{s_n}$

Resolução. Tem-se

$$\frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n} = \frac{b_n}{s_n s_{n-1}}$$

Como $s_n s_{n-1} \leq s_n^2$ já que $b_n > 0$. Assim $\dfrac{b_n}{s_n^2} \leq \dfrac{1}{s_{n-1}} - \dfrac{1}{s_n}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{s_{n-1}} - \dfrac{1}{s_n} \right)$ é uma série de Mengoli convergente, pois tem-se $v_n = \dfrac{1}{s_n} \to 0$. Consequentemente pelo critério geral de comparação, conclui-se que a série dada é convergente.