

Cálculo Diferencial e Integral II

Exame 1 - V2 - 26 de Junho de 2023 - 8h

Duração: 1h

Nome: _____

Número: _____ Curso: _____ Sala: _____

Apresente e justifique todas as respostas

[5.0 val.] 1. Determine uma expressão para o volume do conjunto

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0; 0 < y < 1; x + y < x + z < 2\}$$

na forma de integrais do tipo $\int (\int (\int dz) dy) dx$. Não precisa de calcular o volume.

[5.0 val.] 2. Usando uma mudança de variáveis adequada, calcule o volume do conjunto

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > x^2 + y^2; z + \sqrt{x^2 + y^2} < 2; x > 0; y > 0.\}$$

3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ o campo vectorial definido por

$$f(x, y) = \left(\frac{3x}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{3y}{(x^2 + y^2)^2} \right).$$

[3.0 val.] a) Determine o integral de $\|f\|$ ao longo da semi-circunferência de centro na origem e raio $\sqrt{3}$ contida no semi-plano direito.

[4.0 val.]

- b) Determine o trabalho de f ao longo da porção da elipse de equação $x^2 + 4y^2 = 16$ contida no semi-plano direito no sentido decrescente de y .

[3.0 val.]

4. Prove que se f é um campo escalar de classe $C^2(A)$, com $A \subset \mathbb{R}^2$ aberto, e o trabalho de $\left(\frac{\partial f}{\partial y}, -\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ é nulo ao longo da fronteira de qualquer triângulo contido em A , então f é harmónica em A , ou seja,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

em todos os pontos de A . (Sugestão: Suponha que existe um ponto (a, b) em que a igualdade não se verifica).