Soluções série I (Física II)

2) $1.46\times10^{-1} = 1.06\times10^{-25}\times N \Rightarrow N = 1.38\times10^{24}$ átomos

Admitamos que cada átomo é uma esfera de diâmetro d e que os átomos se tocam. Como é um cubo haverá o mesmo número n de átomos ao longo de cada aresta do cubo. Logo

$$N = n^3 \Rightarrow n = 1.1\times10^{8} \text{ átomos aproximadamente}$$

Por outro lado $nd = 2.5\times10^{-2}\,m \Rightarrow d \approx 2.27\times10^{-10}\,m$ o que é uma boa aproximação

1) $E = h\nu = (6.63\times10^{-34}\,J.s)(6\times10^{14}\,s) = 3.98\times10^{-19}\,J$

3) Usando o modelo de Bohr o electrão tem uma órbita circular em torno do núcleo. Uma órbita de raio r é percorrida em τ segundos e portanto

$$v\tau = 2\pi r \quad \text{onde } v \text{ é a velocidade}$$

Por outro lado a condição de quantização de Bohr diz-nos que

$$L = \frac{nh}{2\pi} \quad n \in \mathbb{N}$$

e logo

$$L = mvr = \frac{nh}{2\pi} \Rightarrow v = \frac{nh}{2\pi m r} \Rightarrow \tau = \frac{4\pi^2 m r^2}{nh}$$

A força de Coulomb actuando no electrão é centrípeta e logo

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow e^2 r = m v^2 r^2 4\pi\varepsilon_0$$

$$\Rightarrow r = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 v^2 m} \Rightarrow r = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m}\left(\frac{4\pi^2 m^2 r^2}{n^2 h^2}\right)$$

$$\Rightarrow r = \frac{n^2 h^2 \varepsilon_0}{\pi e^2 m} \Rightarrow \tau = \frac{4 n^3 h^3 \varepsilon_0^2}{m e^4} \quad (*)$$

A energia associada ao nível n é portanto

$$E_n = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Com as expressões que temos para v e r podemos escrever

$$E_n = -\frac{m e^4}{8\varepsilon_0^2 n^2 h^2} = h\nu_n \Rightarrow \nu_n = -\frac{m e^4}{8\varepsilon_0^2 n^2 h^3}$$

A frequência radiada na transição entre dois níveis de energia adjacentes é

$$\nu_n - \nu_{n-1} = \frac{m e^4}{8\varepsilon_0^2 h^3}\left(\frac{2n-1}{n^2(n-1)^2}\right) \quad (**)$$

De (*) sabemos que

$$\nu = \frac{m e^4}{4\varepsilon_0^2 n^3 h^3} \quad (+)$$

De (**), para $n \gg 1 \Rightarrow 2n-1 \approx 2n$ e logo

$$\nu_n - \nu_{n-1} \approx \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^3}\left(\frac{2n}{n^{4}}\right) =$$

$$= \frac{me^4}{4n^3 \varepsilon_0^2 h^3}$$

que é idêntico a (†).

4) $V = mgz$; a energia de um fotão é $\varepsilon = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$

fotões $= n = \frac{V}{\varepsilon} = 3 \times 10^{14}$

6) $\Delta E \Delta t \gtrsim h$. Mas $E = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow \frac{dE}{d\lambda} = -\frac{hc}{\lambda^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta E \approx -\frac{hc}{\lambda^2}\Delta\lambda$

Usando a incerteza de Heisenberg

$$-\frac{hc}{\lambda^2}\Delta\lambda\Delta t \gtrsim h \Rightarrow \Delta\lambda \gtrsim -\frac{\lambda^2}{2\pi c \Delta t} \quad (*)$$

$\Delta\lambda \gtrsim 4.5 \times 10^{-21}$ m

Podemos esquecer o sinal - porque (*) só nos diz que quando Δt aumenta $\Delta\lambda$ diminui

7.) a) Na estatística de BE as duas partículas podem estar no mesmo estado.

Imaginemos que temos n_i bosões que temos de distribuir por g_i estados. Vamos pôr o problema da seguinte maneira

partículas

$$\underbrace{0}\,\|\,\underbrace{00}\,|\,0\,|\,000 \cdots |||\,00$$

estados

Com g_i-1 linhas e n_i círculos. Quantas possibilidades distintas há de arranjo deste sistema de n_i círculos e g_i-1 estados?

$$C(n_i+g_i-1, n_i) = \frac{(n_i+g_i-1)!}{n_i!(g_i-1)!} = \frac{6!}{2!\,4!} =$$

$$= \frac{6\times 5\times \cancel{4}\times\cancel{3}\times\cancel{2}}{2\times\cancel{4}\times\cancel{3}\times\cancel{2}} = 15$$

b) Na estatística de FD cada estado só pode ter 1 partícula. A primeira partícula pode ser posta em qualquer dos estados. O número de possibilidades é g_i. A 2ª pode ser posta em (g_i-1) estados, etc. No conjunto temos

$$g_i(g_i-1)\cdots(g_i-n_i+1) = \frac{g_i!}{(g_i-n_i)!}$$

Mas as partículas são indistinguíveis pelo que temos de ter em conta as combinações a mais. n_i partículas dão origem a $n_i!$ permutações entre elas. Logo o número de combinações para FD é

$$\frac{g_i!}{n_i!\,(g_i-n_i)!}$$

Para o nosso caso temos

$$\frac{5!}{2!\;3!} = \frac{5\times \cancel{4}^{\,2}\times\cancel{3}\times\cancel{2}}{\cancel{2}\times\cancel{3}\times\cancel{2}} = 10$$

5)

$$\rho(\lambda) = \frac{8\pi c h \lambda^{-5}}{e^{\frac{ch}{\lambda kT}}-1}$$

$$\frac{d\rho}{d\lambda} = \frac{8\pi c h \lambda^{-6}}{e^{\frac{ch}{\lambda kT}}-1}\left[-5 + \frac{(ch/\lambda kT)\,e^{\frac{ch}{\lambda kT}}}{e^{\frac{ch}{\lambda kT}}-1}\right]$$

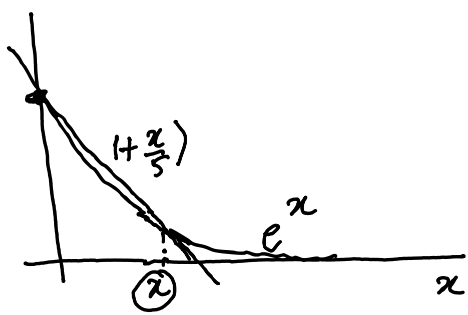
Para o extremos $\frac{d\rho}{d\lambda}=0 \Rightarrow$ o termo de fora tem esse valor para $\lambda=0$ ou $\lambda=\infty$. (Ok) não mínimos como se quer

Para o termo entre parêntesis rectos ser $=0$ é bem mais complicado. Pondemos $x = -\frac{ch}{\lambda_{max} kT}$.

Temos então

$$e^{x} = 1 + \frac{x}{5}$$

que é uma equação transcendental que tem de ser resolvida graficamente (e numericamente)



$x = 4.965$

Logo

$$\frac{ch}{\lambda_{max} kT} = -4.965 \Rightarrow \lambda_{max} = \frac{ch}{k \times 4.965} \frac{1}{T} =$$

$$= \frac{B}{T}$$

1.8

$$K_{max} = h\nu - W = \frac{hc}{\lambda} - W$$

$$K_{max}(\lambda_1 = 200\,nm) - K_{max}(\lambda_2 = 258\,nm) = hc\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)$$

$$\Rightarrow h = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{c} \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left[K_{max}(\lambda_1) - K_{max}(\lambda_2)\right] =$$

$$= 6.642 \times 10^{-34}\ J.s$$

$$W = \frac{h\nu}{\lambda_1} - K_{max}(200\,nm) = 3.9\ eV$$

1.9

Órbita n do átomo de Bohr ($\hbar = h/2\pi$)

$$v_n = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\hbar n} \quad ; \quad r_n = \frac{1}{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} m_e} \hbar^2 n^2$$

Logo

$$p_n = m_e v_n = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{m_e}{\hbar n} \quad ;$$

o comprimento de onda de de Broglie é

$$\lambda_n = \frac{h}{p_n} = \frac{1}{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} m_e} h \hbar n = \frac{2\pi r_n}{n}$$

$\Rightarrow$ "perímetro da órbita" $= 2\pi r_n = n \lambda_n$