Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Introdução à Álgebra — LMAC

Exame 2 - 14 de Julho de 2021 - 15:00

Duração: 2 horas

Apresente e justifique todos os cálculos.

[2.0] 1. Mostre que S_n é gerado por $n-1$ permutações de ordem 2.

Sugestão: comece por mostrar que $(1\ k)(1\ k-1)\dots(1\ 3)(1\ 2)$ é um ciclo de ordem k para qualquer $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$.

[2.0] 2. Descreva todos os homomorfismos $h : D_{2n} \to Q_8$, para cada $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ (indique apenas os valores atribuídos aos geradores de D_{2n}, distinguindo os casos n par e n ímpar).

[2.0] 3. Desenhe o reticulado de subgrupos de $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$.

[2.0] 4. Calcule o centralizador do conjunto $\{s, r^3\}$ em D_{16}.

[2.0] 5. (a) Seja $n \in \mathbb{N}$. Mostre que qualquer subgrupo de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é um subanel.

[1.0] (b) Dê um exemplo de um anel R e de um subgrupo de R que não é um subanel.

[2.0] 6. Sendo B um anel booleano, mostre que a relação binária $\leq$ definida em B por

$$x \leq y \iff xy = x$$

é uma ordem parcial (i.e., uma relação reflexiva, transitiva e anti-simétrica), e que nessa ordem quaisquer dois elementos $x, y \in B$ têm ínfimo igual a xy.

[0.5] 7. (a) Enumere todos os elementos invertíveis de $\mathbb{Z}[i]$.

[1.5] (b) Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, e seja N a norma habitual de $\mathbb{Z}[i]$. Mostre que se $N(a+bi)$ for um número primo então $a+bi$ é irredutível em $\mathbb{Z}[i]$.

[2.0] (c) Mostre que $\mathbb{Z}[i]/(1+6i)$ é um corpo.

[3.0] 8. Mostre que se um grupo G tiver ordem 14 então tem um e um só subgrupo de ordem 7.

Sugestão: comece por mostrar que existe pelo menos um subgrupo de ordem 7, analisando separadamente o caso em que G é não-abeliano e o caso em que G é abeliano, e recordando que um grupo cujos elementos têm todos ordem menor ou igual a 2 é necessariamente abeliano. Depois demonstre a unicidade do subgrupo de ordem 7.