MEEC

Controlo em Espaço de Estados

2020/2021

Exame – 30 de Junho de 2020

Duração 3 horas

Sem consulta de nenhum tipo

Cotação: P1a)2 b)1c)1d)1 **P2**a)2 b)2 c)1 d)1 **P3** a)1 b)2 c)1 **P4**a)1 b)1 **P5**a)2 b)1

P1. Considere o modelo de estado autónomo (sem entrada), de 2ª ordem

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

a) Utilizando a decomposição modal, determine a resposta no tempo quando a condição inicial é

$$x^a(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Determine a resposta no tempo quando a condição inicial é

$$x^b(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

c) Determine a matriz de transição de estado (exponencial da matriz)

d) Determine $x(0)$ tal que $x(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

P2. Considere o sistema linear e invariante descrito pelo modelo de estado

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad y = Cx,$$

em que as matrizes A, b e C são

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Diga, justificando com base nas respetivas matrizes, se esta realização é controlável e/ou observável.

b) Calcule os ganhos (componentes do vetor K) da lei de realimentação do estado $u(t) = -Kx(t)$ que posicionam os polos do sistema controlado em -2 e -3.

c) Projete um observador assintótico que coloca os polos do observador em -5 e -6.

d) Calcule o denominador da função de transferência do controlador (conjunto observador + realimentação da estimativa do estado).

P3. Considere o sistema descrito pelo modelo de estado não linear,

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -(x_1 + x_1^2)$$

a) Calcule todos os pontos de equilíbrio.

b) Obtenha o sistema linearizado em torno de cada um dos pontos de equilíbrio do sistema. Para cada um deles, diga, justificando, o que pode concluir sobre a estabilidade do ponto de equilíbrio do **sistema não linear** a partir da respetiva linearização.

c) Para o ponto, ou pontos, em que pode tirar conclusões sobre o sistema não linear, a partir da sua linearização, trace qualitativamente o retrato de fase aproximado em torno dele(s). Não pode usar os sinais da derivada.

Ajuda: Definição da matriz jacobiana

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

P4. Considere o sistema linear

$$\dot{x} = ax + u,$$

em que a entrada u e o estado x são escalares e a é um parâmetro desconhecido, mas constante. Para controlar este sistema usa-se uma lei de controlo da forma $u(t) = -Kx(t)$ em que o ganho K é dado por

$$K = \hat{a} - a_m,$$

sendo a_m dado e $\hat{a}$ uma estimativa de a, cuja lei de ajuste é tal que

$$V(x, \tilde{a}) = \frac{1}{2}(x^2 + \tilde{a}^2)$$

fica uma função de Lyapunov, em que $\tilde{a} = \hat{a} - a$.

a) Determine uma lei de adaptação de $\hat{a}$ que garanta que V é uma função de Lyapunov. O que pode dizer sobre a estabilidade com base no teorema de Lyapunov?

b) Relativamente à lei de ajuste que obteve em a), o que pode dizer sobre a estabilidade com base no conjunto invariante? Justifique.

P5. Considere a lei de controlo que minimiza

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}[(r - x(t))^2 + \rho u^2(t)]\, dt \qquad (11)$$

para o sistema escalar

$$\dot{x} = x + u \qquad (12)$$

em que r é uma referência constante que se pretende que x siga e ρ é um parâmetro positivo. Seja o erro de seguimento em percentagem dado por

$$\frac{r - \bar{x}}{r} \times 100, \qquad (13)$$

em que $\bar{x}$ é o valor de equilíbrio de x.

a) Recorrendo ao Princípio de Pontryagin, calcule o controlo ótimo.

b) Dê uma condição em ρ que garanta que, em regime estacionário, o erro de seguimento em percentagem é inferior a 5%.

Ajuda

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u) \qquad x(0) = x_0 \qquad J(u) = \Psi(x(T)) + \int_0^T L(x,u)dt$$

$$-(\frac{d\lambda}{dt})' = \lambda'(t) f_x(x(t), u(t)) + L_x(x(t), u(t)) \qquad \lambda'(T) = \Psi_x(x(T))$$

$$H(\lambda, x, u) = \lambda' f(x,u) + L(x,u)$$

$$f_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \qquad L_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial x_1} & \frac{\partial L}{\partial x_2} \end{bmatrix} \qquad \Psi_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$