Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Unidade de Ensino de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Cursos: MEAer, MEEC
Exame 1^a Época - 14 de Junho de 2021 - 15h30
Duração: 2 horas

Resolução abreviada

(2 val.) 1. Calcule ou mostre que não existe o limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\operatorname{sen}(x^3+4y^2) + \frac{e^y x^3 + y^4 \cos x}{x^2+y^2} \right).$$

Resolução: O limite é igual à soma dos limites

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \operatorname{sen}(x^3+4y^2) + \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^y x^3 + y^4 \cos x}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^y x^3 + y^4 \cos x}{x^2+y^2},$$

pois a função no primeiro limite é uma função contínua que é igual a zero na origem. Por outro lado temos, quando $(x,y)\to(0,0)$,

$$\left| \frac{e^y x^3 + y^4 \cos x}{x^2+y^2} \right| \leq e^y \frac{x^2}{x^2+y^2}|x| + y^2 \cos x \, \frac{y^2}{x^2+y^2} \leq e^y|x| + y^2 \cos x \to 0,$$

logo o limite existe e é igual a zero.

(2 val.) 2. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que $f(3,4)=0$ e $\nabla f(3,4)=(-2,-1)$. Considere a função $g(x,y) = \operatorname{sen}\left(\pi + f(2x+y, 3+y^3)\right)$. Calcule a derivada de g no ponto $(1,1)$ segundo o vector $v=(2,1)$.

Resolução: A função g é uma função diferenciável, pois é a composta de funções diferenciáveis. Logo $D_v g(1,1) = \nabla g(1,1)\cdot v$. As derivadas parciais de g no ponto $(1,1)$ são dadas por

$$\frac{\partial g}{\partial x}(1,1) = \cos(\pi + f(3,4))\frac{\partial f}{\partial x}(3,4).2 = \cos(\pi)(-2).2 = 4,$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(1,1) = \cos(\pi + f(3,4))\left(\frac{\partial f}{\partial x}(3,4).1 + \frac{\partial f}{\partial y}(3,4).3y^2 \right)_{|y=1} = -(-2+(-1).3) = 5.$$

Portanto $D_v g(1,1) = (4,5)\cdot(2,1) = 13$.

(3 val.) 3. Determine e classifique os pontos de estacionaridade da função $g(x,y) = y^4 + 2x^2 - 4xy$.

Resolução: A equação vectorial,

$$\nabla g(x,y) = (4x-4y, 4y^3-4x) = (0,0)$$

tem as soluções $(x,y)=(0,0)$, $(x,y)=(1,1)$ e $(x,y)=(-1,-1)$, logo estes são os pontos de estacionaridade de g.

A matriz hessiana de g é

$$H_g(x,y) = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{bmatrix},$$

logo

$$H_g(0,0) = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad H_g(1,1) = H_g(-1,-1) = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 12 \end{bmatrix},$$

donde podemos concluir que $(0,0)$ é um ponto de sela (o determinante da matriz é negativo, logo os valores próprios têm sinais contrários), e os pontos $(1,1)$ e $(-1,-1)$ são pontos de mínimo local (o determinante e o traço da matriz são positivos, logo os valores próprios são ambos positivos).

(3 val.) 4. Um sólido com a forma da região

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x+1)^2 < y^2 + z^2 < 4,\, x > 0\right\},$$

tem densidade de massa $\sigma = \frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}$. Usando uma mudança de coordenadas apropriada, calcule a massa do sólido.

Resolução: Usando uma mudança de coordenadas para coordenadas cilíndricas (ρ, θ, x), o conjunto D é definido por

$$x + 1 < \rho < 2, \quad x > 0.$$

Fazendo uma secção ao sólido para um valor de θ, obtemos no plano $x\rho$ um triângulo delimitado pelas rectas $x = 0$, $\rho = 2$ e $x = \rho - 1$. Assim, a massa do sólido é dada por

$$M = \int_D \sigma = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \int_0^{\rho-1} \frac{x}{\rho} \rho \, dx \, d\rho \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{x+1}^2 \frac{x}{\rho} \rho \, d\rho \, dx \, d\theta = \frac{\pi}{3}.$$

5. Considere a superfície

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, y > 0, z > 0\right\},$$

orientada com a normal n tal que $n_y < 0$.

(2 val.) (a) Determine o espaço tangente a S no ponto $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$.

Resolução: O espaço tangente a S é o plano $\sqrt{3}x + \sqrt{2}y + z = 0$.

(2 val.) (b) Calcule o fluxo do campo vectorial $F(x,y,z) = (x + \arctan z, y, x^2 + y^2)$ através de S no sentido de n.

Resolução: Sejam

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1, y > 0, z > 0\right\},$$

$T_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, y > 0, x^2 + y^2 < 1\right\}$, $T_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, z > 0, x^2 + z^2 < 1\right\}$
e $n_{T_1} = (0,0,-1), n_{T_2} = (0,-1,0)$.

Pelo teorema da divergência,

$$\int_V divF = -\int_S F \cdot n + \int_{T_1} F \cdot n_{T_1} + \int_{T_2} F \cdot n_{T_2}.$$

Ora, $divF = 2$ pelo que $\int_V divF = 2\pi/3$. Por outro lado, $F \cdot N_{T_1} = -(x^2 + y^2)$ pelo que

$$\int_{T_1} F \cdot n_{T_1} = \int_0^\pi \int_0^1 (-r^2) r dr d\theta = -\pi/4.$$

Como $F \cdot n_{T_2} = -y = 0$ em T_2, $\int_{T_2} F \cdot n_{T_2} = 0$ e $\int_S F \cdot n = -2\pi/3 - \pi/4 = -11\pi/12$.

(3 val.) (c) Utilizando o teorema de Stokes, calcule o fluxo do campo vectorial $H(x, y, z) = (1, 1, 1)$ através de S no sentido de n.

Resolução: O bordo de S é constituído por duas semi-circunferências A e B que, orientadas de forma compatível com n, podem ser parametrizadas por:

$$g_A(\theta) = (\sin(\theta), \cos(\theta), 0), \theta \in [-\pi/2, \pi/2], \;\; g_B(\alpha) = (\cos(\alpha), 0, \sin(\alpha)), \alpha \in [0, \pi].$$

O campo vectorial h dado por $h(x, y, z) = (0, x, -x+y)$ é um potencial vector para H. Logo, pelo teorema de Stokes,

$$\int_S H \cdot n = \int_S \operatorname{rot} h = \oint_{\partial S} h = \int_A h + \int_B h.$$

Temos,

$$\int_A h = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (0, \sin(\theta), -\sin(\theta)+\cos(\theta)) \cdot (\cos(\theta), -\sin(\theta), 0) d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-\sin^2(\theta)) d\theta = -\pi/2.$$

e

$$\int_B h = \int_0^{\pi} (0, \cos(\alpha), -\cos(\alpha)) \cdot (-\sin(\alpha), 0, \cos(\alpha)) d\alpha = \int_0^{\pi} (-\cos^2(\alpha)) d\alpha = -\pi/2.$$

Logo,

$$\int_S H \cdot n = \int_S \operatorname{rot} h \cdot n = \oint_{\partial s} h = -\pi,$$

o que, aliás, se pode confirmar rapidamente com o teorema da divergência.

(3 val.) 6. Seja

$$U = \mathbb{R}^3 \setminus \left\{ \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0 \right\} \cup \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 1, z = 0 \right\} \right\}.$$

Seja $f : U \to \mathbb{R}^3$ um campo vectorial de classe C^1 fechado. Mostre que existem $a, b \in \mathbb{R}$ e $\phi : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2 tal que

$$f = a \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right) + b \left(\frac{-z}{(x-1)^2 + z^2}, 0, \frac{x-1}{(x-1)^2 + z^2} \right) + \nabla \phi.$$

Resolução: Sejam

$$C_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, x^2 + y^2 = 1 \right\}, \; C_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, (x-1)^2 + z^2 = 1 \right\}$$

orientadas no sentido anti-horário quando vistas dos pontos $(0, 0, 10)$ e $(1, 10, 0)$ respectivamente. Sejam

$$a = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_1} f, \; b = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_2} f.$$

Então, o campo vectorial

$$f - a \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right) - b \left(\frac{-z}{(x-1)^2 + z^2}, 0, \frac{x-1}{(x-1)^2 + z^2} \right)$$

tem integral de linha nulo ao longo de qualquer curva fechada em U pelo que é gradiente em U, existindo um campo escalar ϕ nas condições do enunciado.