Probabilidades e Estatística

LEAN, LEE, LEGI, LERC, MEAmbi, MEEC, MEM, MEMec, MEQ

2º semestre – 2020/2021
15/05/2021 – **11:00**

Duração: 60+15 minutos **Teste 1B**

Justifique convenientemente todas as respostas

Pergunta 1	4 valores

O funcionamento de uma cadeira de rodas elétrica depende de três componentes (A, B e C) que funcionam de maneira independente. As componentes A e C funcionam com probabilidades a e c, respetivamente, enquanto que a probabilidade da componente B não funcionar é b.

Determine a probabilidade de no máximo uma das três componentes funcionar.

- **Quadro de acontecimentos e probabilidades**

Acontecimento	Probabilidade
A = componente A está a funcionar	$P(A) = a$
B = componente B está a funcionar	$P(B) = 1 - b$
C = componente C está a funcionar	$P(C) = c$

- **Prob. pedida**

  Ao admitirmos que os eventos A, B e C são mutuamente independentes, temos

$$\begin{aligned}
&P(\text{“no máximo uma das três componentes funcionar”})\\
&\quad= P(\text{“nenhuma componentes funcionar”} \cup \text{“funcionar uma e só uma componente”})\\
&\quad= P(\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}) + P(A\cap\bar{B}\cap\bar{C}) + P(\bar{A}\cap B\cap\bar{C}) + P(\bar{A}\cap\bar{B}\cap C)\\
&\quad= (1-a)\times b\times(1-c) + a\times b\times(1-c) + (1-a)\times(1-b)\times(1-c) + (1-a)\times b\times c.
\end{aligned}$$

Pergunta 2	4 valores

Uma farmácia adquire testes rápidos de antigénio, para a deteção da covid-19, a um fornecedor externo que os disponibiliza em lotes de a unidades. Admita que, para avaliar a qualidade de um lote, o diretor técnico da farmácia seleciona, ao acaso e sem reposição, b testes e rejeita o lote se forem encontrados pelo menos dois testes defeituosos entre os selecionados.

Qual é a probabilidade aproximada de um lote contendo c testes defeituosos ser rejeitado?

- **V.a.**

  X = número de testes defeituosos, em b testes examinados (ao acaso e sem reposição) de um lote com a testes dos quais c são defeituosos

- **Distribuição de X**

  $X \sim \text{hipergeométrica}(N = a, M = c, n = b)$

- **Aproximação binomial da distribuição de X**

  Uma vez que $n = b < 0.1\,N = 0.1 \times a$, a f.p. de X pode ser aproximada pela f.p. da v.a. aproximativa

$$\tilde{X} \sim \text{binomial}\left(n = b, p = \frac{M}{N} = \frac{c}{a}\right).$$

i.e., por

$$P(\tilde{X} = x) \quad = \quad \binom{b}{x} \left(\frac{c}{a}\right)^{x} \left(1 - \frac{c}{a}\right)^{b-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, b.$$

- **Prob. pedida** (valor aproximado)

$$\begin{aligned}
P(\text{lote ser rejeitado}) &= P(X \geq 2) \\
&= 1 - P(X \leq 1) \\
&\simeq 1 - P(\tilde{X} \leq 1) \\
&= 1 - [P(\tilde{X} = 0) + P(\tilde{X} = 1)] \\
&= 1 - \left[\left(1 - \frac{c}{a}\right)^{b} + b\,\frac{c}{a}\left(1 - \frac{c}{a}\right)^{b-1}\right].
\end{aligned}$$

Pergunta 3	4 valores

O tempo de funcionamento, X (em horas), da bateria de uma cadeira de rodas elétrica segue uma distribuição normal com valor esperado igual a 12 horas. Sabe-se ainda que a% das baterias funcionam mais de b horas.

Ao selecionar-se uma dessas baterias ao acaso, qual é a probabilidade de o seu tempo de funcionamento não exceder b horas, sabendo que tal bateria ainda está a funcionar ao fim de c horas?

- **V.a.**

  X = tempo de funcionamento (em horas) de uma bateria i

  $X \sim \text{normal}(\mu = 12, \sigma^2)$

- **Cálculo de σ^2**

$$\begin{aligned}
\sigma^2 > 0 \quad : \quad & P(X > b) = \frac{a}{100} \\
& 1 - P(X \leq b) = \frac{a}{100} \\
& 1 - \frac{a}{100} = P(X \leq b) \\
& 1 - \frac{a}{100} = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) \\
& \Phi^{-1}\left(1 - \frac{a}{100}\right) = \frac{b - \mu}{\sigma} \\
& \sigma^2 = \frac{(b - \mu)^2}{\left[\Phi^{-1}\left(1 - \frac{a}{100}\right)\right]^2}
\end{aligned}$$

- **Prob. pedida**

  Temos

$$P(X \leq b \mid X > c) \quad = \quad \frac{P(X \leq b, X > c)}{P(X > c)}$$

$$
\begin{aligned}
P(X \le b \mid X > c) &= \frac{P(c < X \le b)}{1 - P(X \le c)} \\
&= \frac{P(X \le b) - P(X \le c)}{1 - P(X \le c)},
\end{aligned}
$$

onde:

$$
\begin{aligned}
P(X \le b) &= 1 - P(X > b) \\
&= 1 - \frac{a}{100}; \\
P(X \le c) &= P\left(Z = \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{c-\mu}{\sigma}\right) \\
&= \Phi\left[\frac{c-12}{b-12} \times \Phi^{-1}\left(1 - \frac{a}{100}\right)\right].
\end{aligned}
$$

Pergunta 4	4 valores

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias independentes com distribuição uniforme no intervalo (a,b) e função de densidade de probabilidade

$$
f_Y(y) = \begin{cases} 2y, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}
$$

respectivamente.

Calcule a variância de $(c\,X\,Y)$.

- **V.a.**

  $X \sim \text{uniforme}(a,b), \qquad Y \text{ tal que } f_Y(y) = \begin{cases} 2y, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$

  $X \perp\!\!\!\perp Y$

- **Variância pedida**

$$
\begin{aligned}
V(cXY) &= c^2 V(XY) \\
&= c^2 \times \{E[(X\,Y)^2] - E^2(XY)\} \\
&= c^2 \times \left[E(X^2\,Y^2) - [E(XY)]^2\right] \\
&\overset{X \perp\!\!\!\perp Y}{=} c^2 \times \{E(X^2) \times E(Y^2) - [E(X) \times E(Y)]^2\} \\
&= c^2 \times \left[E(X^2) \times E(Y^2) - E^2(X) \times E^2(Y)\right],
\end{aligned}
$$

onde:

$$
\begin{aligned}
E(X) &\overset{form}{=} \frac{a+b}{2}; \\
E(X^2) &= V(X) + E^2(X) \\
&\overset{form}{=} \frac{(b-a)^2}{12} + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\
&= \frac{a^2 + ab + b^2}{3};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= \int_0^1 y \times 2y\,dy \\
&= \left.\frac{2y^3}{3}\right|_0^1 \\
&= 2/3; \\
E(Y^2) &= \int_0^1 y^2 \times 2y\,dy \\
&= \left.\frac{2y^4}{4}\right|_0^1 \\
&= 1/2.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
V(cXY) &= c^2 \times \left[\frac{a^2+ab+b^2}{3} \times \frac{1}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2\right] \\
&= c^2 \times \frac{a^2-ab+b^2}{18}
\end{aligned}
$$

Pergunta 5	4 valores

Considere que a massa (em kg) de uma *handbike* é uma variável aleatória X com distribuição uniforme no intervalo (65, 75).

Numa amostra causal de n *handbikes*, qual é a probabilidade aproximada de a massa média dessas *handbikes* ser superior a a kilos e inferior a b kg. Assuma que as massas das *handbikes* são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas a X.

- **V.a.; valor esperado e variância comuns**

  $X_i =$ massa da *handbike* i, $\quad i = 1, \ldots, n$

  $X_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} X \sim \text{uniforme}(65, 75)$

  $E(X_i) = E(X) = \mu \stackrel{form}{=} \frac{65+75}{2} = 70$

  $V(X_i) = V(X) = \sigma^2 \stackrel{form}{=} \frac{(75-65)^2}{12} = \frac{100}{12} = \frac{25}{3}$

- **V.a. de interesse**

  $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

  $E(\bar{X}) = \cdots = \mu$

  $V(\bar{X}) = \cdots = \frac{\sigma^2}{n}$

- **Distribuição aproximada de $\bar{X}$**

  De acordo com o TLC,

$$
\frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sqrt{V(\bar{X})}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \stackrel{a}{\sim} \text{normal}(0, 1).
$$

- **Prob. pedida** (valor aproximado)

$$
\begin{aligned}
P(a < \bar{X} < b) &= P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} < \frac{b-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\right) - P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} < \frac{a-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\right) \\
&\overset{TLC}{\simeq} \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\right).
\end{aligned}
$$