Probabilidades e Estatística

LEGM, LEIC-A, LEIC-T, LMAC, MA, MEAer, MEBiol, MEBiom, MEFT

DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

2º semestre – 2020/2021
15/05/2021 – **9:00**

Duração: 60+15 minutos **Teste 1A**

Justifique convenientemente todas as respostas

Pergunta 1	4 valores

Uma engenheira informática realiza, sequencialmente, três operações de manutenção de um servidor. Em a% das manutenções realiza a operação A em primeiro lugar. b% é a percentagem correspondente à realização da operação B em segundo lugar, sabendo que a realização desta operação foi precedida pela realização da operação A. A operação C é realizada em terceiro lugar em c% das manutenções em que são realizadas as operações A e B em primeiro e segundo lugares, respetivamente.

Qual é a probabilidade de a engenheira ter realizado em primeiro e segundo lugares as operações A e B (respectivamente) e não ter realizado a operação C em terceiro lugar, numa manutenção selecionada ao acaso?

- **Quadro de acontecimentos e probabilidades**

Acontecimento	Probabilidade
A = engenheira realiza operação A em primeiro lugar	$P(A) = \frac{a}{100}$
B = engenheira realiza operação B em segundo lugar	$P(B) = ?$
C = engenheira realiza operação C em terceiro lugar	$P(C) = ?$
	$P(B \mid A) = \frac{b}{100}$
	$P[C \mid (A \cap B)] = \frac{c}{100}$

- **Prob. pedida**

  De acordo com a lei das probabilidades compostas, temos

$$
\begin{aligned}
P(A \cap B \cap \bar{C}) &= P(A) \times P(B \mid A) \times P[\bar{C} \mid (A \cap B)] \\
&= P(A) \times P(B \mid A) \times \{1 - P[C \mid (A \cap B)]\} \\
&= \frac{a}{100} \times \frac{b}{100} \times \left(1 - \frac{c}{100}\right).
\end{aligned}
$$

Pergunta 2	4 valores

Numa fábrica de explosivos utilizados em exploração mineira, as peças produzidas possuem etiqueta inadequada em a% dos casos. Admita que foram inspecionadas n peças de modo independente e que a variável aleatória X representa o total de peças inspecionadas com etiqueta inadequada.

Recorra à aproximação de Poisson da distribuição binomial de modo a obter um valor aproximado para $P[X \leq E(X) \mid X \geq 1]$.

- **V.a.**

  X = total de peças com etiqueta inadequada em n inspecionadas de modo independente

- **Distribuição de** X

  $X \sim \text{binomial}(n, p)$

- **Aproximação de Poisson da distribuição de X**

  Dado que $n > 20$ e $p = \frac{a}{100} < 0.1$, a f.d. de X pode ser aproximada pela f.d. da v.a. aproximativa

$$\tilde{X} \quad \sim \quad \text{Poisson}(\lambda = n \times p).$$

- **Prob. pedida** (valor aproximado)

  Uma vez que $E(X) = n \times p = n \times \frac{a}{100} \geq 1$, temos

$$\begin{aligned}
P[X \leq E(X) \mid X \geq 1] &= \frac{P[X \leq E(X), X \geq 1]}{P(X \geq 1)} \\
&= \frac{P[1 \leq X \leq E(X)]}{P(X \geq 1)} \\
&= \frac{P[0 < X \leq E(X)]}{1 - P(X \leq 0)} \\
&= \frac{F_X(E(X)) - F_X(0)}{1 - F_X(0)} \\
&\simeq \frac{F_{\tilde{X}}\left(\left[n \times \frac{a}{100}\right]\right) - F_{\tilde{X}}(0)}{1 - F_{\tilde{X}}(0)},
\end{aligned}$$

Pergunta 3	4 valores

Suponha que o tempo (em minutos) despendido por um cliente em determinado site comercial é representado pela v.a. X com distribuição exponencial com mediana igual a me.

Obtenha $E(a X^2 + b X + c)$.

- **V.a. de interesse, f.d.p. e f.d.**

$$\begin{aligned}
X &= \text{tempo (em minutos) despendido por um cliente em determinado site comercial} \\
f_X(x) &\stackrel{form.}{=} \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \\
F_X(x) &= P(X \leq x) \\
&= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt \\
&= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \int_0^x \lambda e^{-\lambda x}\, dt = 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

- **Obtenção do parâmetro λ**

$$\begin{aligned}
\lambda > 0 \quad : \quad & F_X(me) = \frac{1}{2} \\
& 1 - e^{-\lambda\, me} = \frac{1}{2} \\
& \lambda = \frac{\ln(2)}{me}
\end{aligned}$$

- **Valor esperado pedido**

$$E(a X^2 + b X + c) \quad = \quad a \times E(X^2) + b \times E(X) + c$$

$$
\begin{aligned}
E(a X^2 + b X + c) &= a \times [V(X) + E^2(X)] + b \times E(X) + c \\
&\stackrel{form.}{=} a \times \left[\frac{1}{\lambda^2} + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2\right] + b \times \frac{1}{\lambda} + c \\
&= \frac{2a}{\lambda^2} + \frac{b}{\lambda} + c,
\end{aligned}
$$

onde $\lambda = \frac{\ln(2)}{me}$.

Pergunta 4 — 4 valores

O tempo máximo de voo (em horas) de uma aeronave é dado por $Z = a\,\frac{X}{Y}$, onde a variável aleatória X (resp. Y) representa a quantidade de combustível ao início do voo (resp. a taxa de consumo de combustível).

Admita que X e Y são variáveis aleatórias contínuas independentes tais que $X \sim \text{uniforme}(5,6)$ e $Y \sim \text{uniforme}(b,c)$.

Calcule a variância de Z.

- **Par aleatório**

  $X =$ quantidade de combustível (em tonelada) ao início do voo

  $X \sim \text{uniforme}(5,6)$

  $Y =$ taxa de consumo de combustível (em hora por tonelada de combustível)

  $Y \sim \text{uniforme}(b,c)$

- **Variância pedida**

$$
\begin{aligned}
V(Z) &= V\left(a\,\frac{X}{Y}\right) \\
&= a^2 \times V(X/Y) \\
&= a^2 \times \left\{E\left[(X/Y)^2\right] - E^2(X/Y)\right\} \\
&\stackrel{X \perp\!\!\!\perp Y}{=} a^2 \times \left\{E(X^2) \times E(1/Y^2) - [E(X) \times E(1/Y)]^2\right\}
\end{aligned}
$$

onde, atendendo ao facto de $X \sim \text{uniforme}(5,6)$ e $Y \sim \text{uniforme}(b,c)$:

$$
\begin{aligned}
E(X) &\stackrel{form}{=} \frac{5+6}{2} \\
&= \frac{11}{2}; \\
E(X^2) &= V(X) + E^2(X) \\
&\stackrel{form}{=} \frac{(6-5)^2}{12} + \frac{11^2}{2^2} \\
&= \frac{1}{12} + \frac{121}{4} \\
&= \frac{91}{3}; \\
E(1/Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{y} \times f_Y(y)\,dy \\
&= \int_b^c \frac{1}{y} \times \frac{1}{c-b}\,dy
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(1/Y) &= \left.\frac{\ln(y)}{c-b}\right|_b^c \\
&= \frac{\ln(c)-\ln(b)}{c-b}; \\
E(1/Y^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{y^2} \times f_Y(y)\,dy \\
&= \int_b^c \frac{1}{y^2} \times \frac{1}{c-b}\,dy \\
&= -\left.\frac{1}{c-b}\,\frac{1}{y}\right|_b^c = \frac{1}{c-b} \times \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) \\
&= \frac{1}{bc}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
V(Z) = a^2 \times \left\{ \frac{91}{3} \times \frac{1}{bc} - \left[\frac{11}{2} \times \frac{\ln(c)-\ln(b)}{c-b} \right]^2 \right\}.
$$

Pergunta 5	4 valores

Admita que os tempos (em horas) de reparação de reguladores de tensão eléctrica de automóveis são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas à variável aleatória X com valor esperado $E(X) = \frac{2}{a}$ e segundo momento $E(X^2) = \frac{24}{a^2}$, onde $a = a$.

Obtenha um valor aproximado para a probabilidade de o tempo total de reparação de n desses reguladores pertencer ao intervalo $]b, c]$.

- **V.a.; valor esperado e variância comuns**

  $X_i =$ tempo de reparação do regulador de tensão eléctrica do automóvel i, $\quad i = 1, \ldots, n$

  $X_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} X$

  $E(X_i) = E(X) = \mu = \frac{2}{a}$

  $V(X_i) = V(X) = \sigma^2 = E(X^2) - E^2(X) = \frac{24}{a^2} - \left(\frac{2}{a}\right)^2 = \frac{20}{a^2}$

- **V.a. de interesse**

  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i =$ tempo total de reparação de n desses reguladores

  $E(S_n) = \cdots = n \times \mu$

  $V(S_n) = \cdots = n \times \sigma^2$

- **Distribuição aproximada de S_n**

  De acordo com o TLC,

  $$\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \stackrel{a}{\sim} \text{normal}(0,1).$$

- **Prob. pedida** (valor aproximado)

$$\begin{aligned} P(b < S_n \leq c) &= P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq \frac{c - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) - P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq \frac{b - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) \\ &\overset{TLC}{\simeq} \Phi\left(\frac{c - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) - \Phi\left(\frac{b - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) \end{aligned}$$