DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Probabilidades e Estatística

LEAN, LEE, LEGI, LERC, MEAmbi, MEEC, MEM, MEMec, MEQ

2º semestre – 2020/2021
15/05/2021 – **11:00**

Duração: 60+15 minutos **Teste 1B**

Justifique convenientemente todas as respostas

Pergunta 1 4 valores

O funcionamento de uma cadeira de rodas elétrica depende de três componentes (A, B e C) que funcionam de maneira independente. As componentes A e C funcionam com probabilidades 0.65 e 0.86, respetivamente, enquanto que a probabilidade da componente B não funcionar é 0.7.

Determine a probabilidade de no máximo uma das três componentes funcionar.

- **Quadro de acontecimentos e probabilidades**

Acontecimento	Probabilidade
A = componente A está a funcionar	$P(A) = 0.65$
B = componente B está a funcionar	$P(B) = 1 - 0.7$
C = componente C está a funcionar	$P(C) = 0.86$

- **Prob. pedida**

  Ao admitirmos que os eventos A, B e C são mutuamente independentes, temos

$$\begin{aligned}
&P(\text{“no máximo uma das três componentes funcionar”})\\
&= P(\text{“nenhuma componentes funcionar”} \cup \text{“funcionar uma e só uma componente”})\\
&= P(\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}) + P(A\cap\bar{B}\cap\bar{C}) + P(\bar{A}\cap B\cap\bar{C}) + P(\bar{A}\cap\bar{B}\cap C)\\
&= P(\bar{A})\times P(\bar{B})\times P(\bar{C}) + P(A)\times P(\bar{B})\times P(\bar{C}) + P(\bar{A})\times P(B)\times P(\bar{C}) + P(\bar{A})\times P(\bar{B})\times P(C)\\
&= (1-0.65)\times 0.7\times(1-0.86) + 0.65\times 0.7\times(1-0.86) + (1-0.65)\times(1-0.7)\times(1-0.86)\\
&\quad +(1-0.65)\times 0.7\times 0.86\\
&= 0.3234.
\end{aligned}$$

Pergunta 2 4 valores

Uma farmácia adquire testes rápidos de antigénio, para a deteção da covid-19, a um fornecedor externo que os disponibiliza em lotes de 170 unidades. Admita que, para avaliar a qualidade de um lote, o diretor técnico da farmácia seleciona, ao acaso e sem reposição, 6 testes e rejeita o lote se forem encontrados pelo menos dois testes defeituosos entre os selecionados.

Qual é a probabilidade aproximada de um lote contendo 3 testes defeituosos ser rejeitado?

- **V.a.**

  X = número de testes defeituosos, em 6 testes examinados (ao acaso e sem reposição) de um lote com 170 testes dos quais 3 são defeituosos

- **Distribuição de X**

  $X \sim \text{hipergeométrica}(N = 170, M = 3, n = 6)$

- **Aproximação binomial da distribuição de X**

  Uma vez que $n = 6 < 0.1\,N = 0.1 \times 170 = 17$, a f.p. de X pode ser aproximada pela f.p. da v.a. aproximativa

$$\tilde{X} \sim \text{binomial}\left(n = 6, p = \frac{M}{N} = \frac{3}{170}\right).$$

i.e., por

$$P(\tilde{X} = x) \quad = \quad \binom{6}{x}\left(\frac{3}{170}\right)^x \left(1 - \frac{3}{170}\right)^{6-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, 6.$$

- **Prob. pedida** (valor aproximado)

$$\begin{aligned}
P(\text{lote ser rejeitado}) &= P(X \geq 2) \\
&= 1 - P(X \leq 1) \\
&\simeq 1 - P(\tilde{X} \leq 1) \\
&= 1 - [P(\tilde{X} = 0) + P(\tilde{X} = 1)] \\
&= 1 - \left[\left(1 - \frac{3}{170}\right)^6 + 6 \times \frac{3}{170} \times \left(1 - \frac{3}{170}\right)^{6-1}\right] \\
&\simeq 0.004456.
\end{aligned}$$

Pergunta 3	4 valores

O tempo de funcionamento, X (em horas), da bateria de uma cadeira de rodas elétrica segue uma distribuição normal com valor esperado igual a 12 horas. Sabe-se ainda que 10% das baterias funcionam mais de 14 horas.

Ao selecionar-se uma dessas baterias ao acaso, qual é a probabilidade de o seu tempo de funcionamento não exceder 14 horas, sabendo que tal bateria ainda está a funcionar ao fim de 12.8 horas?

- **V.a.**

  X = tempo de funcionamento (em horas) de uma bateria i

  $X \sim \text{normal}(\mu = 12, \sigma^2)$

- **Cálculo de σ^2**

$$\begin{aligned}
\sigma^2 > 0 \quad : \quad & P(X > 14) = \frac{10}{100} \\
& 1 - P(X \leq 14) = 0.1 \\
& 0.9 = P(X \leq 14) \\
& 0.9 = \Phi\left(\frac{14 - \mu}{\sigma}\right) \\
& \Phi^{-1}(0.9) = \frac{14 - \mu}{\sigma} \\
& \sigma^2 = \frac{(14 - 12)^2}{\left[\Phi^{-1}(0.9)\right]^2} \\
& \sigma^2 = \frac{2^2}{1.2816^2} \\
& \sigma^2 \simeq 2.435314
\end{aligned}$$

- **Prob. pedida**

  Temos

$$
\begin{aligned}
P(X \le 14 \mid X > 12.8) &= \frac{P(X \le 14,\, X > 12.8)}{P(X > 12.8)} \\
&= \frac{P(12.8 < X \le 14)}{1 - P(X \le 12.8)} \\
&= \frac{P(X \le 14) - P(X \le 12.8)}{1 - P(X \le 12.8)},
\end{aligned}
$$

onde:

$$
\begin{aligned}
P(X \le 14) &= 1 - P(X > 14) \\
&= 0.9; \\
P(X \le 12.8) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{12.8-\mu}{\sigma}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{12.8-12}{\sqrt{2.435314}}\right) \\
&\simeq \Phi(0.51) \\
&\overset{tabelas/calc.}{=} 0.6950.
\end{aligned}
$$

Consequentemente, a probabilidade condicionada pedida é igual a

$$
\begin{aligned}
P(X \le 14 \mid X > 12.8) &= \frac{P(X \le 14) - P(X \le 12.8)}{1 - P(X \le 12.8)} \\
&= \frac{0.9 - 0.6950}{1 - 0.6950} \\
&\simeq 0.672131.
\end{aligned}
$$

Pergunta 4	4 valores

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias independentes com distribuição uniforme no intervalo $(5,6)$ e função de densidade de probabilidade

$$
f_Y(y) = \begin{cases} 2y, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}
$$

respectivamente.

Calcule a variância de $2XY$.

- **V.a.**

  $X \sim \text{uniforme}(5,6)$, $\quad Y$ tal que $f_Y(y) = \begin{cases} 2y, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$

  $X \perp\!\!\!\perp Y$

- **Variância pedida**

$$
\begin{aligned}
V(2XY) &= 2^2 \times V(XY) \\
&= 4 \times \left\{E[(XY)^2] - E^2(XY)\right\} \\
&= 4 \times \left[E(X^2Y^2) - [E(XY)]^2\right] \\
&\overset{X \perp\!\!\!\perp Y}{=} 4 \times \left\{E(X^2) \times E(Y^2) - [E(X) \times E(Y)]^2\right\} \\
&= 4 \times \left[E(X^2) \times E(Y^2) - E^2(X) \times E^2(Y)\right],
\end{aligned}
$$

onde:

$$
\begin{aligned}
E(X) &\overset{form}{=} \frac{5+6}{2} \\
&= \frac{11}{2} \\
&= 5.5;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= V(X) + E^2(X) \\
&\overset{form}{=} \frac{(6-5)^2}{12} + \left(\frac{5+6}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{12} + \frac{11^2}{2^2} \\
&= \frac{91}{3};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= \int_0^1 y \times 2y\,dy \\
&= \left.\frac{2y^3}{3}\right|_0^1 \\
&= \frac{2}{3};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(Y^2) &= \int_0^1 y^2 \times 2y\,dy \\
&= \left.\frac{2y^4}{4}\right|_0^1 \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
V(2XY) &= 4 \times \left[\frac{91}{3} \times \frac{1}{2} - \left(\frac{11}{2}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2\right] \\
&= \frac{62}{9} \\
&= 6.(8).
\end{aligned}
$$

Pergunta 5 4 valores

Considere que a massa (em kg) de uma *handbike* é uma variável aleatória X com distribuição uniforme no intervalo (65, 75).

Numa amostra causal de 36 *handbikes*, qual é a probabilidade aproximada de a massa média dessas *handbikes* ser superior a 69.58 kilos e inferior a 70.07 kg. Assuma que as massas das *handbikes* são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas a X.

- **V.a.; valor esperado e variância comuns**

  X_i = massa da *handbike* i, $\quad i = 1, \ldots, n$

  $n = 36$

  $X_i \overset{i.i.d.}{\sim} X \sim \text{uniforme}(65, 75)$

$E(X_i) = E(X) = \mu \overset{form}{=} \frac{65+75}{2} = 70$

$V(X_i) = V(X) = \sigma^2 \overset{form}{=} \frac{(75-65)^2}{12} = \frac{100}{12} = \frac{25}{3}$

- **V.a. de interesse**

  $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

  $E(\bar{X}) = \cdots = \mu = 70$

  $V(\bar{X}) = \cdots = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\frac{25}{3}}{36} = \frac{25}{108}$

- **Distribuição aproximada de $\bar{X}$**

  De acordo com o TLC,

$$\frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sqrt{V(\bar{X})}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \overset{a}{\sim} \text{normal}(0,1).$$

- **Prob. pedida** (valor aproximado)

$$\begin{aligned}
P(a < \bar{X} < b) \quad &= \quad P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} < \frac{b-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\right) - P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} < \frac{a-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\right) \\
&\overset{TLC}{\simeq} \quad \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\right) \\
&= \quad \Phi\left(\frac{70.07-70}{\sqrt{\frac{25}{108}}}\right) - \Phi\left(\frac{69.58-70}{\sqrt{\frac{25}{108}}}\right) \\
&\simeq \quad \Phi(0.15) - \Phi(-0.87) \\
&\simeq \quad \Phi(0.15) - [1 - \Phi(0.87)] \\
&\overset{tabelas/calc.}{=} \quad 0.5596 - (1 - 0.8078) \\
&= \quad 0.3674.
\end{aligned}$$