Probabilidades e Estatística

LEGM, LEIC-A, LEIC-T, LMAC, MA, MEAer, MEBiol, MEBiom, MEFT

2º semestre – 2020/2021
15/05/2021 – **9:00**

Duração: 60+15 minutos **Teste 1A**

Justifique convenientemente todas as respostas

Pergunta 1 4 valores

Uma engenheira informática realiza, sequencialmente, três operações de manutenção de um servidor. Em 70% das manutenções realiza a operação A em primeiro lugar. 43% é a percentagem correspondente à realização da operação B em segundo lugar, sabendo que a realização desta operação foi precedida pela realização da operação A. A operação C é realizada em terceiro lugar em 31% das manutenções em que são realizadas as operações A e B em primeiro e segundo lugares, respetivamente.

Qual é a probabilidade de a engenheira ter realizado em primeiro e segundo lugares as operações A e B (respectivamente) e não ter realizado a operação C em terceiro lugar, numa manutenção selecionada ao acaso?

- **Quadro de acontecimentos e probabilidades**

Acontecimento	Probabilidade
A = engenheira realiza operação A em primeiro lugar	$P(A) = \frac{70}{100}$
B = engenheira realiza operação B em segundo lugar	$P(B) = ?$
C = engenheira realiza operação C em terceiro lugar	$P(C) = ?$
	$P(B \mid A) = \frac{43}{100}$
	$P[C \mid (A \cap B)] = \frac{31}{100}$

- **Prob. pedida**

  De acordo com a lei das probabilidades compostas, temos

$$
\begin{aligned}
P(A \cap B \cap \bar{C}) &= P(A) \times P(B \mid A) \times P[\bar{C} \mid (A \cap B)] \\
&= P(A) \times P(B \mid A) \times \{1 - P[C \mid (A \cap B)]\} \\
&= \frac{70}{100} \times \frac{43}{100} \times \left(1 - \frac{31}{100}\right) \\
&= 0.20769.
\end{aligned}
$$

Pergunta 2 4 valores

Numa fábrica de explosivos utilizados em exploração mineira, as peças produzidas possuem etiqueta inadequada em 1% dos casos. Admita que foram inspecionadas 520 peças de modo independente e que a variável aleatória X representa o total de peças inspecionadas com etiqueta inadequada.

Recorra à aproximação de Poisson da distribuição binomial de modo a obter um valor aproximado para $P[X \leq E(X) \mid X \geq 1]$.

- **V.a.**

  X = total de peças com etiqueta inadequada em n inspecionadas de modo independente

- **Distribuição de X**

  $X \sim \text{binomial}(n, p)$

- **Aproximação de Poisson da distribuição de X**

  Dado que $n = 520 > 20$ e $p = \frac{1}{100} < 0.1$, a f.d. de X pode ser aproximada pela f.d. da v.a. aproximativa

  $$\tilde{X} \quad \sim \quad \text{Poisson}(\lambda = n \times p = 5.2).$$

- **Prob. pedida** (valor aproximado)

  Uma vez que $E(X) = n \times p = 5.2 \geq 1$, temos

  $$\begin{aligned}
  P[X \leq E(X) \mid X \geq 1] &= \frac{P[X \leq E(X), X \geq 1]}{P(X \geq 1)} \\
  &= \frac{P[1 \leq X \leq E(X)]}{P(X \geq 1)} \\
  &= \frac{P[0 < X \leq E(X)]}{1 - P(X \leq 0)} \\
  &= \frac{F_X(E(X)) - F_X(0)}{1 - F_X(0)} \\
  &\simeq \frac{F_{\tilde{X}}([5.2]) - F_{\tilde{X}}(0)}{1 - F_{\tilde{X}}(0)}, \quad \text{onde } [5.2] \text{ é a parte inteira do real } 5.2 \\
  &= \frac{F_{Poisson(5.2)}(5) - F_{Poisson(5.2)}(0)}{1 - F_{Poisson(5.2)}(0)} \\
  &\overset{tabelas/calc.}{\simeq} \frac{0.5809 - 0.0055}{1 - 0.0055} \\
  &\simeq 0.578582.
  \end{aligned}$$

Pergunta 3	4 valores

Suponha que o tempo (em minutos) despendido por um cliente em determinado site comercial é representado pela v.a. X com distribuição exponencial com mediana igual a $me = 6.48$.

Obtenha $E(0.7\,X^2 + 1.5\,X + 3)$.

- **V.a. de interesse, f.d.p. e f.d.**

  $$\begin{aligned}
  X &= \text{tempo (em minutos) despendido por um cliente em determinado site comercial} \\
  f_X(x) &\overset{form.}{=} \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \\
  F_X(x) &= P(X \leq x) \\
  &= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt \\
  &= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \int_0^x \lambda\, e^{-\lambda x}\, dt = 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}
  \end{aligned}$$

- **Obtenção do parâmetro λ**

  $$\begin{aligned}
  \lambda > 0 \quad : \quad & F_X(me) = \frac{1}{2} \\
  & 1 - e^{-\lambda \times me} = \frac{1}{2} \\
  & \lambda = \frac{\ln(2)}{me} \simeq 0.106967
  \end{aligned}$$

- **Valor esperado pedido**

$$\begin{aligned}
E(0.7X^2+1.5X+3) &= 0.7\times E(X^2)+1.5\times E(X)+3 \\
&= 0.7\times[V(X)+E^2(X)]+1.5\times E(X)+3 \\
&\overset{form.}{=} 0.7\times\left[\frac{1}{\lambda^2}+\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2\right]+1.5\times\frac{1}{\lambda}+3 \\
&= \frac{2\times 0.7}{\lambda^2}+\frac{1.5}{\lambda}+3 \\
&\overset{\lambda\simeq 0.106967}{\simeq} 139.379899.
\end{aligned}$$

Pergunta 4 — 4 valores

O tempo máximo de voo (em horas) de uma aeronave é dado por $Z = 8.6\,\frac{X}{Y}$, onde a variável aleatória X (resp. Y) representa a quantidade de combustível ao início do voo (resp. a taxa de consumo de combustível).

Admita que X e Y são variáveis aleatórias contínuas independentes tais que $X \sim \text{uniforme}(5,6)$ e $Y \sim \text{uniforme}(1,2.5)$.

Calcule a variância de Z.

- **Par aleatório**

  X = quantidade de combustível (em tonelada) ao início do voo

  $X \sim \text{uniforme}(5,6)$

  Y = taxa de consumo de combustível (em hora por tonelada de combustível)

  $Y \sim \text{uniforme}(1,2.5)$

- **Variância pedida**

$$\begin{aligned}
V(Z) &= V\left(8.6\,\frac{X}{Y}\right) \\
&= 8.6^2\times V(X/Y) \\
&= 8.6^2\times\left\{E\left[(X/Y)^2\right]-E^2(X/Y)\right\} \\
&\overset{X\perp\!\!\!\perp Y}{=} 8.6^2\times\left\{E(X^2)\times E(1/Y^2)-[E(X)\times E(1/Y)]^2\right\}
\end{aligned}$$

onde, atendendo ao facto de $X \sim \text{uniforme}(5,6)$ e $Y \sim \text{uniforme}(1,2)$:

$$\begin{aligned}
E(X) &\overset{form}{=} \frac{5+6}{2} \\
&= \frac{11}{2}; \\
E(X^2) &= V(X)+E^2(X) \\
&\overset{form}{=} \frac{(6-5)^2}{12}+\frac{11^2}{2^2} \\
&= \frac{1}{12}+\frac{121}{4} \\
&= \frac{91}{3};
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E(1/Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{y} \times f_Y(y)\, dy \\
&= \int_1^2 \frac{1}{y} \times \frac{1}{2.5-1}\, dy \\
&= \left. \frac{\ln(y)}{2.5-1} \right|_1^{2.5} \\
&= \frac{\ln(2.5)-\ln(1)}{2.5-1} \\
&= \frac{\ln(2.5)}{1.5};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(1/Y^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{y^2} \times f_Y(y)\, dy \\
&= \int_1^{2.5} \frac{1}{y^2} \times \frac{1}{2.5-1}\, dy \\
&= - \left. \frac{1}{2.5-1}\, \frac{1}{y} \right|_1^{2.5} \\
&= \frac{1}{2.5-1} \times \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2.5} \right) \\
&= 0.4.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
V(Z) &= 8.6^2 \times \left\{ \frac{91}{3} \times 0.4 - \left[\frac{11}{2} \times \frac{\ln(2.5)}{1.5} \right]^2 \right\} \\
&\simeq 62.5354.
\end{aligned}
$$

Pergunta 5	4 valores

Admita que os tempos (em horas) de reparação de reguladores de tensão eléctrica de automóveis são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas à variável aleatória X com valor esperado $E(X) = \frac{2}{a}$ e segundo momento $E(X^2) = \frac{24}{a^2}$, onde $a = 1.5$.

Obtenha um valor aproximado para a probabilidade de o tempo total de reparação de 49 desses reguladores pertencer ao intervalo $]49.0, 68.6]$.

- **V.a.; valor esperado e variância comuns**

  X_i = tempo de reparação do regulador de tensão eléctrica do automóvel i, $\quad i = 1, \ldots, n$

  $n = 49$

  $X_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} X$

  $E(X_i) = E(X) = \mu = \frac{2}{1.5} = \frac{4}{3}$

  $V(X_i) = V(X) = \sigma^2 = E(X^2) - E^2(X) = \frac{24}{1.5^2} - \left(\frac{2}{1.5}\right)^2 = \frac{20}{1.5^2} = \frac{80}{9}$

- **V.a. de interesse**

  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i =$ tempo total de reparação de n desses reguladores

$E(S_n) = \cdots = n \times \mu = 49 \times \frac{4}{3} = \frac{196}{3}$

$V(S_n) = \cdots = n \times \sigma^2 = 49 \times \frac{80}{9} = \frac{3920}{9}$

- **Distribuição aproximada de S_n**

  De acordo com o TLC,

$$\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \overset{a}{\sim} \text{normal}(0,1).$$

- **Prob. pedida** (valor aproximado)

$$\begin{aligned}
P(49.0 < S_n \leq 68.6) &= P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq \frac{68.6 - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) - P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq \frac{49.0 - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) \\
&\overset{TLC}{\simeq} \Phi\left(\frac{68.6 - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) - \Phi\left(\frac{49.0 - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) \\
&\simeq \Phi\left(\frac{68.6 - \frac{196}{3}}{\sqrt{\frac{3920}{9}}}\right) - \Phi\left(\frac{49.0 - \frac{196}{3}}{\sqrt{\frac{3920}{9}}}\right) \\
&\simeq \Phi(0.16) - \Phi(-0.78) \\
&\simeq \Phi(0.16) - [1 - \Phi(0.78)] \\
&\overset{tabelas/calc.}{=} 0.5636 - (1 - 0.7823) \\
&= 0.3459.
\end{aligned}$$