Resumos

I Análise Complexa

1 Funções holomorfas

Definição 1. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ um subconjunto aberto e seja $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ uma função. Dizemos que f é *diferenciável* em $p \in \Omega$ se existe

$$f'(p) = \lim_{z \to p} \frac{f(z) - f(p)}{z - p}.$$

Se f é diferenciável em cada ponto de Ω dizemos que f é *holomorfa* em Ω.

Se $f = u + iv$, com $u = \operatorname{Re} f$ e $v = \operatorname{Im} f$, e u, v são de classe C^1, então f é holomorfa em Ω se e só se satisfaz a equação de **Cauchy-Riemann**.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Notamos que se f é holomorfa então $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$. Uma função holomorfa em $\mathbb{C}$ chama-se *inteira*.

Definição 2. Dizemos que uma função real $u(x, y)$ de classe C^2 é harmónica se satisfaz a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Se $f = u + iv$ é holomorfa, então u e v são harmónicas, e dizemos que u e v são *conjugadas harmónicas*.

1.1 Integral de uma função complexa

Seja $f(z)$ uma função complexa contínua definida num aberto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Se $\gamma\colon [a, b] \to \Omega$ é um caminho seccionalmente regular definimos o *integral* de f em γ por

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)\, dt\,.$$

Teorema 1 (Teorema Fundamental do Cáculo). *Se f é um função complexa contínua em $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ e se existe uma função holomorfa F em Ω tal que $f(z) = F'(z)$, então*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big)$$

Teorema 2 (Teorema de Cauchy). *Se $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ é uma função holomorfa e Ω é simplesmente conexo, então para cada caminho seccionalmente regular fechado $\gamma\colon [a, b] \to \Omega$, temos $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$.*

Definição 3. Seja $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ um caminho seccionalmente regular. O *índice* de um ponto $p \in \mathbb{C} \setminus \gamma\big([a,b]\big)$ em relação a γ é

$$\mathrm{Ind}_\gamma(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-p}.$$

Teorema 4 (Fórmula Integral de Cauchy). *Se f é uma função holomorfa numa bola aberta B e γ é um caminho seccional regular fechado em B, então para qualquer ponto $p \in B \setminus \gamma$ temos*

$$\mathrm{Ind}_\gamma(p) \cdot f^{(n)}(p) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-p)^{n+1}}\, dz.$$

1.2 Funções Harmónicas

Uma função real $u(x,y)$ chama-se *harmónica* quando é de classe $\mathcal{C}^2$ e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Para $f = u + iv$ uma função holomorfa, as funções u e v são harmónicas e dizemos que u e v são **harmónicas conjugadas**.

Nota 1. Se $u(x,y)$ é uma função definida num aberto simplesmente conexo $U \subseteq \mathbb{R}^2$, é sempre possível determinar uma harmónica conjugada $v\colon U \to \mathbb{R}$ resolvendo as equações de Cauchy-Riemann em ordem a v.

2 Séries de Potências

2.1 Raio de convergência

Para cada séries de potências $\sum_{n=0}^\infty a_n(z-p)^n$ existe um número $0 \le R \le \infty$, que se chama *raio da convergência* da série tal que

(i) A série é absolutamente convergente para $|z-p| < R$.

(ii) Para cada $0 < \rho < R$ a série é uniformemente convergente para $|z-p| \le \rho$.

(iii) A série é divergente para $R < |z-p|$.

(iv) A função $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n(z-p)^n$ é holomorfa em $|z-p| < R$,

$$f'(z) = \sum_{n=1}^\infty n a_n (z-p)^{n-1}$$

e o raio da convergência da série da derivada também é R.

Teorema 1 (Teorema de Taylor). *Se f é um função holomorfa em Ω e $p \in \Omega$, então em cada bola aberta $B_r(p) = \{z : |z-p|, r\} \subseteq \Omega$ temos*

$$f(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(p)}{n!}(z-p).$$

O raio da convergência da série de Taylor é o raio da maior bola $B_r(p) \subseteq \Omega$.

Teorema 2 (Teorema de Laurent)**.** *Se f é uma função holomorfa no anel $r < |z-p| < R$, então*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-p)^n,$$

com

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-p|=s} \frac{f(z)}{(z-p)^{n+1}}\, dz$$

onde $r < s < R$.

3 Singularidades

3.1 Classificação de singularidades isoladas

Dizemos que uma função f tem uma *singularidade isolada* em $p \in \mathbb{C}$ quando existe $r > 0$ tal que f é holomorfa no anel $0 < |z-p| < r$.

Seja f uma função com uma singularidade isolada em p. Define-se a **parte principal** da série de Laurent de f em p por

$$\frac{a_{-1}}{z-p} + \frac{a_{-2}}{(z-p)^2} + \cdots .$$

Dizemos que p é

- um **singularidade removível** quando a parte principal é nula,
- um **pólo de ordem** n quando a parte principal é um polinómio de grau n em $1/(z-p)$,
- um **singularidade essencial** quanto a parte principal é infinita.

Definição 1. Se f tem uma singularidade isolada em p, definimos o *resíduo* de f em p por

$$\operatorname*{Res}_{z=p} f = a_{-1},$$

onde $\sum_{n=-\infty} a_n (z-p)^n$ é a série de Laurent de f em $0 < |z-p| < r$.

Teorema 2 (Teorema dos Resídous)**.** *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ uma região, isto é aberto e conexo, e seja $S = \{a_j\} \subset \Omega$ um conjunto de pontos isolados. Se f é holomorfa em $\Omega \setminus S$, $\gamma\colon [a,b] \to \Omega \setminus S$ é um caminho seccionalmente regular fechado e para cada $p \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ temos*

$$\operatorname{Ind}_\gamma(p) = 0,$$

então

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{a_j \in S} \operatorname{Ind}_\gamma(a_j) \operatorname*{Res}_{z=a_j} f.$$

3.2 Aplicações aos integrais reais

3.2.1 Integrais impróprios

Se $p(x) = a_m x^m + \cdots + a_0$ e $q(x) = b_n x^n + \cdots + b_0$ são polinómios, $n - m \geq 2$ e $q(x)$ não tem raized reais, então

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\, dx = 2\pi i \sum_{(\forall z) q(z)=0 \wedge \operatorname{Im} z > 0} \operatorname*{Res}_{z} \frac{p}{q}.$$

3.2.2 Integrais de coseno e seno

Para $R(x, y)$ uma funçcão racional tal que $R(x, y)$ é contínua em $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$, temos

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\, d\theta = 2\pi i \sum_{(\forall z)|z|<1} \operatorname*{Res}_z f,$$

onde

$$f(z) = \frac{1}{iz} R\Big(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\Big).$$

Por exemplo

$$\int_2^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos\theta} = \oint_{|z|=1} \frac{1}{iz} \times \frac{1}{2 + (z + z^{-1})/2}\, dz.$$

II Equações Diferenciais

4 Equações Diferenciais Ordinárias

Definição 1. Seja $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ aberto, e seja $f \colon D \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua. Dizemos que uma função $\mathbf{x} \colon]a, b[\to \mathbb{R}^n$ é uma *solução* de

$$\mathbf{x}' = f(t, \mathbf{x})$$

quando

(i) para cada $a < t < b$, tem-se $\big(t, \mathbf{x}(t)\big) \in D$,

(ii) para cada $a < t < b$, tem-se $\mathbf{x}'(t) = f\big(t, \mathbf{x}(t)\big)$.

4.1 Equações Separáveis

Uma equação diferencial da forma

$$x' = \frac{f(t)}{g(x)}$$

chama-se *separável*.

Para resolver uma equação separável basta encontrar uma primitiva $F(t)$ de $f(t)$ e uma primitiva $G(x)$ de $g(x)$. Usando a derivada implícita obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} G(x) &= \frac{dG}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \\ &= g(x) \cdot \frac{dx}{dt} = f(t) \\ &= \frac{d}{dt} G(t). \end{aligned}$$

Logo,

$$G(x) = F(t) + \text{(uma constante)}$$

é uma solução *implicitamente* definida.

Exemplo 2.

$$x' = \frac{1 - x^2}{(1 - t)x}$$

é separável. Temos

$$\begin{aligned} \frac{x}{1 - x^2} x' &= \frac{1}{1 - t} \\ \frac{d}{dt} \log |1 - x^2| &= 2 \frac{d}{dt} \log |1 - t| \\ 1 &= x^2 + K(1 - t)^2 \end{aligned}$$

é uma solução implicitamente definida. Dado uma condição inicial $x(t_0) = x_0$ com $t_0 \neq 1$ e $x_0 \neq 0$, temos a solução

$$x = \frac{x_0}{|x_0|} \sqrt{1 - (1 - x_0^2) \left[\frac{1 - t}{1 - t_0} \right]^2}.$$

4.2 Teorema de Picard-Lindelöf

Teorema 1. *Se $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ é aberto e $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ é uma função contínua e as derivadas parciais*

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k}$$

são contínuas, onde $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ e $f(t, \mathbf{x}) = \big(f_1(t, \mathbf{x}), \dots, f_n(t, \mathbf{x})\big)$, então para cada $(t_0, \mathbf{x}_0) \in D$ existe um intervalo $]a, b[$, $a < t_0 < b$, e uma e uma só *função diferenciável $\mathbf{x}\colon]a, b[\to \mathbb{R}^n$ tal que*

(i) $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$,

(ii) *para cada $a < t < b$ tem-se $\big(t, \mathbf{x}(t)\big) \in D$,*

(iii) $\mathbf{x}'(t) = f\big(t, \mathbf{x}(t)\big)$.

Para mostra que pelo menso existe uma solução construímos uma sucessão de funções

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1(t) &= \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, \mathbf{x}_0\big)\, ds \\
\mathbf{x}_2(t) &= \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, \mathbf{x}_1(2)\big)\, ds \\
&\vdots \\
\mathbf{x}_{n+1}(t) &= \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, \mathbf{x}_n(s)\big)\, ds
\end{aligned}$$

As condições da função f garanta que o limite $\mathbf{x}(t) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n(t)$ exite, é uma função diferenciável, $\mathbf{x}' = f(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, e é a função única com essa propriedades.

4.3 Equações Lineares de 1ª Ordem

Uma equação diferencial de forma

$$\mathbf{x}'(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t)$$

com $A\colon]a, b[\to \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\mathbf{b}\colon]a, b[\to \mathbb{R}^n$ funções contínuas chama-se *linear de primeira ordem*. Pelo teorema de Picard-Lindelöf para cada t_0 no intervalo aberto $]a, b[$ e cada vetor $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^n$ existe uma solução única $\mathbf{x}(t)$ definida num intervalo aberto $]a', b'[$, $a \le a' < t_0, b' \le b$ do problema de valor inicial

$$\mathbf{x}'(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{v}_0.$$

Para $n = 1$ temos a solução geral seguinte para

$$x'(t) = a(t) \cdot x(t) + b(t).$$

Designa-se por $\int^t a(t)$ uma primitiva de $a(t)$. Seja $\mu(t) = \exp\big(-\int^t a(t)\big)\big)$. Temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\big(\mu(t) \cdot x(t)\big) &= \mu(t) \cdot b(t) \\
\mu(t) \cdot x(t) &= K + \int^t \mu(t) \cdot b(t) \\
x(t) &= \frac{K}{\mu(t)} = \frac{1}{\mu(t)} \int^t \mu(t) \cdot b(t).
\end{aligned}$$

Exemplo 2. Resolve
$$x' = \frac{x}{t} + t, \quad x(1) = x_0 \text{ para } t > 0.$$
O *fator integrante* $\mu(t) = \exp(-\int^t 1/t) = 1/t$. Logo
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{x}{t} &= 1 \\ \frac{x}{t} &= K + t \\ x(t) &= t^2 + Kt \\ x(t) &= t^2 + (x_0 - 1)t. \end{aligned}$$

Para $n > 1$ e $\mathrm{A}(t)$ uma matriz com coeficientes *constantes* temos
$$\exp(At) = I + \mathrm{A}t + \cdots + \mathrm{A}^n \frac{t^n}{n!} + \cdots$$
e
$$\frac{d \exp(\mathrm{At})}{dt} = \mathrm{A} \exp(\mathrm{A}t) \quad \exp(\mathrm{A}t)^{-1} = \exp(-\mathrm{A}t).$$
Portanto a solução do problema de valor incial
$$\mathbf{x}'(t) = \mathrm{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{v}_0$$
é
$$\mathbf{x}(t) = \exp(\mathrm{A}(t - t_0)) \cdot \mathbf{v}_0 + \exp(\mathrm{A}t) \cdot \int_{t_0}^{t} \exp(-\mathrm{A}s) \cdot \mathbf{b}(s)\, ds.$$

Notamos que para cada veto próprio $\mathbf{v}$ de A temos
$$\mathrm{A} \cdot \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \implies \exp(\mathrm{A}t) \cdot \mathbf{v} = e^{\lambda t}\mathbf{v}.$$
Um vetor não nulo $\mathbf{v}$ chama-se *vetor próprio generalizado* quando existe um inteiro $k > 1$ tal que
$$(A - \lambda I)^k \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}. \tag{1}$$
Temos que (1) implica que
$$\exp(\mathrm{A}t) \cdot \mathbf{v} = e^{\lambda t} \left[I + (\mathrm{A} - \lambda I)t + \cdots + (\mathrm{A} - \lambda I)^{k-1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \right] \cdot \mathbf{v}.$$

4.4 Equações Exata e Redutíveis a Exata

Uma equação diferencial
$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0 \tag{2}$$
chama-se *exata* se existe uma função $\phi(x, y)$ tal que
$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = M \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = N.$$

Se M e N são funções de classe $\mathcal{C}^2$ definidas num rectângulo, então (2) é exata se e só se

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Equação (2) chama-se *redutível* a exata quando existe um fator integrante $\mu(x, y)$ tal que

$$\mu \cdot M + \mu \cdot N \cdot y' = 0$$

é exata.

Exemplo 3. A equação

$$(x + 2)\operatorname{sen} y + (x \cos y)y' = 0$$

não é exata. Temos

$$\frac{\partial}{\partial y}\big((x+2)\operatorname{sen} y\big) = (x+2)\cos y \qquad \frac{\partial}{\partial x}\big(x \cos y\big) = \cos y$$

mas

$$\frac{\partial}{\partial y}\big(xe^x(x+2)\operatorname{sen} y\big) = xe^x(x+2)\cos x \qquad \frac{\partial}{\partial x}\big(x^2e^x \cos y\big) = (2xe^x + x^2e^x)\cos y$$

é exata.

4.5 Equações Lineares de Ordem Superior

Uma equação linear diferencial de ordem n é uma equação diferencial de forma

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)y = b(t) \tag{3}$$

com $a_j(t)$ e $b(t)$ funções contínuas num intervalo aberto $]\alpha, \beta[$. A equação *homogénea* é

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)y = 0. \tag{4}$$

A solução geral de (4) é da forma

$$c_1y_1(t) + \cdots + c_ny_n(t),$$

onde $\{y_j(t)\}_{j=1,\ldots,n}$ é um conjunto de soluções linearmente independentes. Notamos que um conjunto $\{y_1, \ldots, y_n\}$ é linearmente independente se e só se a matriz

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \tag{5}$$

é invertível. Para resolver equação (3) podem usar o método de variação das constantes e obter uma solução particular da equação (3) da forma

$$u_1(t)y_1(t) + \cdots + u_n(t)y_n(t).$$

A matriz $Y(t)$ em (5) chama-se uma *matriz fundamental* da equação homogénea (4). Sendo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & & -a_1 \end{bmatrix}$$

temos

$$Y(t)' = A \cdot Y(t)$$

e como $\left(Y^{-1} \cdot Y\right)' = (Y^{-1})' \cdot Y + Y^{-1} \cdot Y' = 0$ segue que $(Y^{-1})' = -Y^{-1}A$. Sendo

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

obtemos

$$\mathbf{u}' = Y^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix}$$

Exemplo 4. Resolve a equação

$$t^2 y'' - 2ty' + 2y = t^2, \quad t > 0.$$

Para resolver a equação homogénea podemos procurar umas soluções da forma $y = t^\lambda$. Assim temos

$$\lambda(\lambda - 1)t^\lambda - 2\lambda t^\lambda + 2t^\lambda = 0.$$

Logo $\lambda = 1, 2$ e $y_1(t) = t$, $y_2(t) = t^2$ são duas soluções linearmente independentes da equação homogénea. Para determinar uma solução particular escrevemos

$$y'' - \frac{2}{t}y' + \frac{2}{t^2} = 1$$

e obtemos

$$\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \frac{1}{t^2} \begin{bmatrix} -t^2 \\ t \end{bmatrix}$$

Logo a solução geral é

$$y(t) = c_1 t + c_2 t^2 + t^2 \log(t).$$

Quando as coeficientes são constantes as soluções da equação homogénea

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0$$

são determinadas pelas raízes do polinómio

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n = (\lambda - r_1)^{s_1} \cdots (\lambda - r_t)^{s_t}$$

com $r_1, \ldots, r_t$ raízes distintas

$$y_1(t) = e^{r_1 t}, y_2(t) = te^{r_1 t}, \ldots, y_n(t) = t^{s_t - 1} e^{r_t t}.$$

Para determinar uma solução particular da equação não homogénea (3) no caso a função $b(t)$ é da forma

$$\text{polinómio em } t \times \begin{cases} \cos \omega t \\ \operatorname{sen} \omega t \end{cases} \times e^{\alpha t}$$

podemos usar o método dos coeficientes indeterminados. Notamos para D o operador de derivação e $p(t)$ um polinómio de grau N temos

$$p(D)\big(f(t)e^{\alpha t}\big) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(t) p^{(n)}(\alpha)}{n!} e^{\alpha t}.$$

Exemplo 5. Determine uma solução de $y'' + y = \operatorname{sen}(\omega t)$, onde $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Como $\operatorname{sen} t = \operatorname{Im} e^{i\omega t}$ e os coeficientes da equação são reais, a parte imaginária de uma solução de

$$y'' + y = e^{i\omega t}$$

é uma solução de $y'' + y = sent$. Para $y(t) = f(t)e^{i\omega t}$ e $p(t) = t^2 + 1$ temos

$$p(D)\big(f(t)e^{i\omega t}\big) = \big(f(t)(1-\omega^2) + 2f'(t)i\omega + f''(t)\big)e^{i\omega t}.$$

Se $1 - \omega^2 \neq 0$, temos uma solução

$$y(t) = \frac{\operatorname{sen} \omega t}{1 - \omega^2}.$$

Se $1 - \omega^2 = 0$, então temos

$$y(t) = -\frac{t}{2\omega} \cos t.$$

4.6 Transformada de Laplace

Seja $f(t)$ uma função seccionalmente contínua no aberto $[0, +\infty[$. Dizemos que f tem *ordem exponencial* se existem constantes reais c, $0 \leq T$ e $0 < M$ tais que

$$t > T \implies |f(t)| \leq Me^{ct}.$$

Se $f(t)$ é seccionalmente contínua em $[0, +\infty[$ é tem ordem exponencial, definimos a *transformada de Laplace* de f por

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt.$$

A função *Heaviside* é

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & 0 \leq t. \end{cases}$$

Exemplos 6.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st}\cdot e^{at}\,dt = \frac{1}{s-a}\\
\mathcal{L}\{\cos(\omega t) + i\operatorname{sen}(\omega t\}(s) &= \mathcal{L}\left\{e^{i\omega t}\right\}(s) = \frac{s+i\omega}{s^2+\omega^2}\\
\mathcal{L}\{\operatorname{ch}(\omega t)\}(s) &= \mathcal{L}\{\cos(i\omega t)\}(s) = \frac{s}{s^2-\omega^2}\\
\mathcal{L}\{\operatorname{sh}(\omega t)\}(s) &= \mathcal{L}\{-i\operatorname{sen}(i\omega t)\}(s) = \frac{\omega}{s^2-\omega^2}\\
\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) &= (-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}\{f(t)\}(s)\\
\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) &= \mathcal{L}f(t)(s-a)\\
\mathcal{L}\{y'(t)\}(s) &= s\mathcal{L}\{y(t)\} - y(0)\\
\mathcal{L}\{H(t-c)\cdot f(t-c)\}(s) &= e^{-cs}\mathcal{L}\{f(t)\}(s), \text{ onde } c \geq 0.
\end{aligned}
$$

4.6.1 Inversão da transformada de Laplace

Se $p(s)$ e $q(s)$ são polinómios e o grau de q é maior do grau de p, então

$$
\sum_{\{s:q(s)=0\}} \mathcal{L}\left\{\operatorname*{Res}_s e^{st}\frac{p(s)}{q(s)}\right\}(s) = \frac{p(s)}{q(s)}.
$$

Exemplo 7. Para

$$
\frac{s+1}{s^2+2s+5} = \frac{s+1}{(s+1)^2+2^2}
$$

temos

$$
\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{-1+i2} e^{st}\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} + \operatorname*{Res}_{-1-i2} e^{st}\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} &= e^{(-1+i2)t}\frac{i2}{i4} + e^{(-1-i2)t}\frac{-i2}{-i4}\\
&= 2\operatorname{Re} e^{(-1+i2)t}\frac{i2}{i4}\\
&= e^{-t}\cos 2t.
\end{aligned}
$$

E

$$
\mathcal{L}\left\{e^{-t}\cos(2t)\right\}(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2+4}.
$$

Para resolver o problema de valor inicial

$$
y'' + 2y' + 5y = \operatorname{sen} t, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1
$$

podemos usar a transformada de Laplace. Sendo $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}(s)$ obtemos

$$
\big((s+1)^2+4\big)Y = s + 1 + \frac{1}{s^2+1},
$$

e

$$
y(t) = e^{-t}\cos(2t) + \frac{\operatorname{sen} t}{5} - \frac{\cos t}{10} + \frac{e^{-t}}{10}\cos 2t - \frac{e^{-t}}{20}\operatorname{sen} 2t.
$$

4.7 Séries de Fourier

Para uma função $f\colon [-L, L] \to \mathbb{R}$ seccionalmente contínua define-se a *série de Fourier* de f por

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \tag{6}$$

com

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x\, dx \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x\, dx. \end{aligned}$$

Notamos que a série (6) é $2L$-periódica, i.e., para

$$s_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \tag{7}$$

temos $s_N(x) = s_N(x + 2L)$. Seja $f\colon [-L, L] \to \mathbb{R}$ uma função seccionalmente contínua e suponha que $f(L) = f(-L)$. Designa-se, também por f a prologamento dado por $f(x + 2L) = f(x)$. Seja

$$\hat{f}(x) = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(x + \delta) + f(x - \delta)}{2}.$$

Notamos que $f(x) = \hat{f}(x)$ se f contínua em x e $\hat{f}(x)$ é a média dos limites laterais.

Se f e f' são seccionalmente contínuas então para cada ponto x temos

$$\lim_{N \to \infty} s_N(x) = \hat{f}(x).$$

Portanto nos pontos onde f é contínua a série de Fourier de f converge para o valor $f(x)$. Se f é contínua então a série converge uniformemente para f. Também temos que quando f e f' são seccionalmente contínuas temos

$$\lim_{N \to \infty} \int_{-L}^{L} (f - s_N)^2\, dx = 0.$$

Nesse caso dizemos que a série de Fourier converge na norma $\mathbf{L}^2$ para f.

4.8 Equações Diferenciais Parciais

Para resolver a equação do calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{8}$$

que satisfaz as condições de Dirichlet na fronteira

$$u(0, t) = 0 \qquad u(L, t) = 0$$

ou as condições de Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$$

pode usar o método de *separação de variáveis* $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$. Temos então

$$\begin{aligned} X'' + \lambda X &= 0 \qquad\qquad\qquad T' + \lambda T = 0 \\ X(0) &= 0 \\ X(L) &= 0 \\ \text{ou no caso das condição de Neumann} \\ X'(0) &= 0 \\ X'(L) &= 0. \end{aligned}$$

Se $\lambda = 0$ então $X(x) = A + Bx$. No caso das condições de Dirichlet obtemos $0 = A = B$. No caso das condição de Neumann obtemos $X(x)$ e logo $T(t)$ são constantes. Se $\lambda \neq 0$, então

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\,\mathrm{sen}\,\sqrt{\lambda}x.$$

No caso de Dirichlet obtemos uma solução *formal*

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\kappa n^2\pi^2 t/L}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{L}x$$

e no caso de Neumann obtemos uma solução *formal*

$$u(x,t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\kappa n^2\pi^2 t/L}\cos\frac{n\pi}{L}x.$$

Dada uma condição inicial $u(x,0) = f(x)$ podemos usar a série de senos ou de cosenso para determinar os coeficientes nas séries acima.

A equação das ondas é

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{9}$$

Com as condições na fronteira

$$u(0,t) = 0 \qquad u(L,t) = 0$$

e $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ obtemos

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\frac{n\pi}{L}ct + B_n\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{L}ct\right] \cdot \mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{L}x$$

Se $u(x,0) = f(x)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$ podemos usar a teoria da série de Fourier para determinar os coeficientes A_n e B_n acima.

4.8.1 Solução de D' Alembert

Notamos que a equações das ondas pode ser escrita na forma

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(u) = 0. \tag{10}$$

Temos

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

Sendo $v(x,t) = u_t + cu_x$, temos $v_t - cv_x = 0$. Na ponta vista geométrica temos

$$0 = v_t - cv_x = \operatorname{grad} v \cdot (1, -c).$$

Portanto $v(x,t)$ é constante na direção $(1,-c)$ ou seja nas rectas $ct + x = a$ e temos $v(x,t) = v(0, ct+x) = h(ct+x)$. Verifica-se que

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = h(ct+x). \tag{11}$$

tem uma solução da forma $(x+ct) = f(x+ct)$ com $2cf'(s) = h(s)$. Uma solução da equação homogénea de (11) é da forma $g(ct-x)$, e como (11) é linear temos

$$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct).$$

Se as condições iniciais são

$$u(x,0) = \phi(x) \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x)$$

temos

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= f(x) + g(x)\\
\psi(x) &= cf'(x) - cg'(x)\\
K + \frac{1}{c}\int_{x_0}^{x}\psi(s)\,ds &= f(x) - g(x)\\
\frac{1}{2}\phi(x) + \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x}\psi(s)\,ds + \frac{K}{2} &= f(x)\\
\frac{1}{2}\phi(x) - \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x}\psi(s)\,ds - \frac{K}{2} &= g(x)u(x,t) \qquad = \frac{\phi(x+ct)+x-ct}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(s)\,ds.
\end{aligned}$$

Para ver se as duas soluções da equação das ondas são iguais temos o seguinte teorema.

Teorema 8. *Exite no máximo uma solução de classe C^2 da equação das ondas*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 < x < L \quad t > 0$$

que satisfaz

$$u(x,0) = \phi(x) \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) \qquad 0 \le x \le L$$

e

$$u(0,t) = 0 \quad u(L,t) = 0 \qquad t \ge 0.$$

Para mostre o teorema consideremos a função

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \left(c^2 u_x^2 + u_t^2\right) dx$$

e duas soluções u_1 e u_2 juntamente com a função $u = u_1 - u_2$.