7. Sistemas de acontecimentos discretos

Objetivo: Após completar este módulo, o aluno deverá ser capaz de construir modelos simples para sistemas de acontecimentos discretos com base em máquinas de estados finitas.

Referências: C. Cassandras e S. Lafortune (2008). *Introduction to Discrete Event Systems*. Springer. 2ª Edição. *Caps. 1 e 2* (Sistemas de acontecimentos discretos)

D. Luenberger (1979). *Introduction to Dynamic Systems: Theory, models and applications*. Wiley. *Cap. 7 (Cadeias de Markov*).

Exemplo: Máquina de fabrico

Considere-se uma máquina que processa peças, uma de cada vez.

A máquina pode estar num de três **estados**:

- Desocupada (Idle) (I)
- A trabalhar (Working) (W)
- Em baixo (Down) (D)

A máquina pode transitar entre estes estados dependendo de certos **eventos**.

Por exemplo: Se a máquina estiver desocupada e chegar uma peça p, a máquina começa a trabalhar. Enquanto trabalha a máquina pode avariar-se e ficar "em baixo". Enquanto está avariada, pode ser reparada, etc.

Formalmente, a máquina pode ser descrita como um sistema dinâmico com um **estado discreto** q, que pode tomar um dos valores:

$$q \in Q = \{I, W, D\}$$

O estado "salta" de um para outro valor quando um dos seguintes **eventos** σ ocorre

$$\sigma \in \Sigma = \{p, c, f, r\}$$

p = chega uma peça para ser processada

c = processamento completo

f = ocorrência de uma falha

r = reparação completa

O estado após a ocorrência de um evento é dado pela **relação de transição** que a cada estado e a cada evento associa um novo estado:

$$\delta: Q \times \Sigma \to Q$$

Dado que (neste caso) quer Q, quer Σ são conjuntos finitos, podemos especificar δ por enumeração

$$\delta(I, p) = W$$

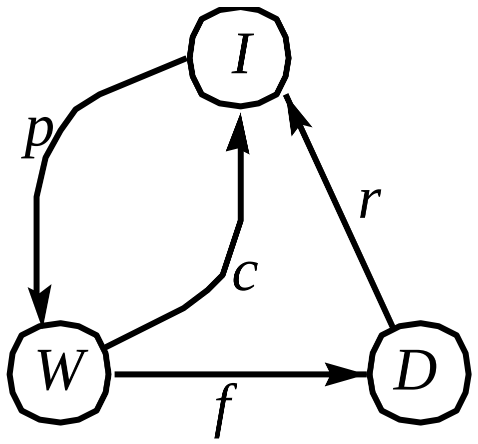
$$\delta(W, c) = I$$

$$\delta(W, f) = D$$

$$\delta(D, r) = I$$

δ é não definido para as restantes combinações de q e σ.

Esta relação pode ser representada pelo **grafo dirigido**:



Trata-se de um grafo em que:

- Os **nós** representam os valores possíveis do estado (neste caso I, W, D)
- Os **arcos** representam possíveis transições entre os valores do estado e são etiquetados pelos eventos.
- Há um estado inicial. A cada evento corresponde apenas um arco.

Autómatos

Este sistema dinâmico diz-se um **autómato** ou uma **máquina de estados finita**.

Os autómatos são casos particulares de **sistemas de acontecimentos (eventos) discretos**.

Em geral, os sistemas de acontecimentos discretos são sistemas dinâmicos cujo estado (discreto) transita ("salta") dependendo dos eventos de um conjunto finito, mas pode assumir um número infinito de valores.

Estados e eventos

Estado: Uma variável que, se for conhecida num dado momento, permite calcular a evolução futura se conhecermos os eventos futuros.

Questão: No jogo do Monopólio a Prisão é um estado? E a R. Augusta?

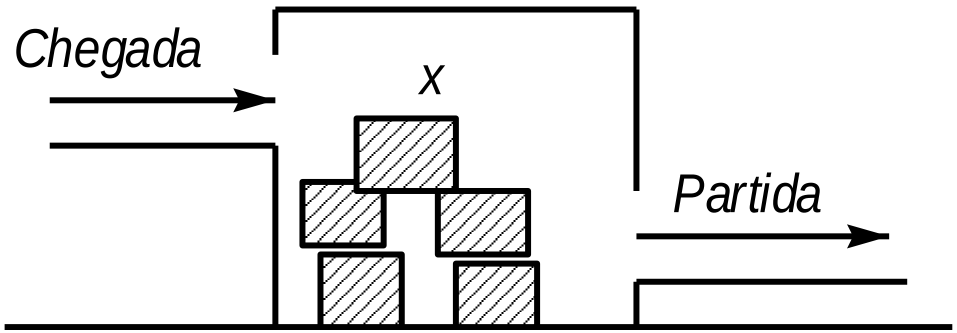
Evento: Algo que ocorre instantaneamente, e que causa as transições de estado nos sistemas de acontecimentos discretos. Exemplos:

- O nível de um tanque chega a um determinado valor;
- Uma interrupção numa CPU
- A chegada ou partida de uma peça à máquina para ser maquinada.

Questão: Quais os eventos no Jogo do Monopólio?

Exemplo: Sistema de armazenagem

Considere-se um armazém que contém produtos acabados:

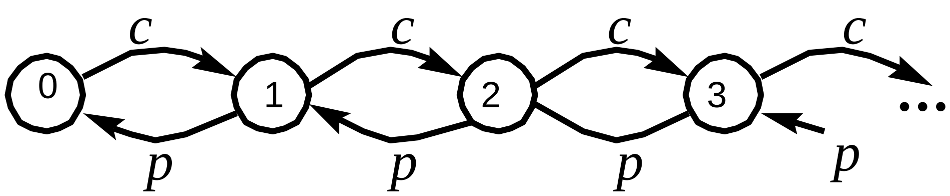


Assume-se que os instantes de chegada e partida de produtos nunca são exatamente iguais e que chega ou parte só uma unidade de cada vez.

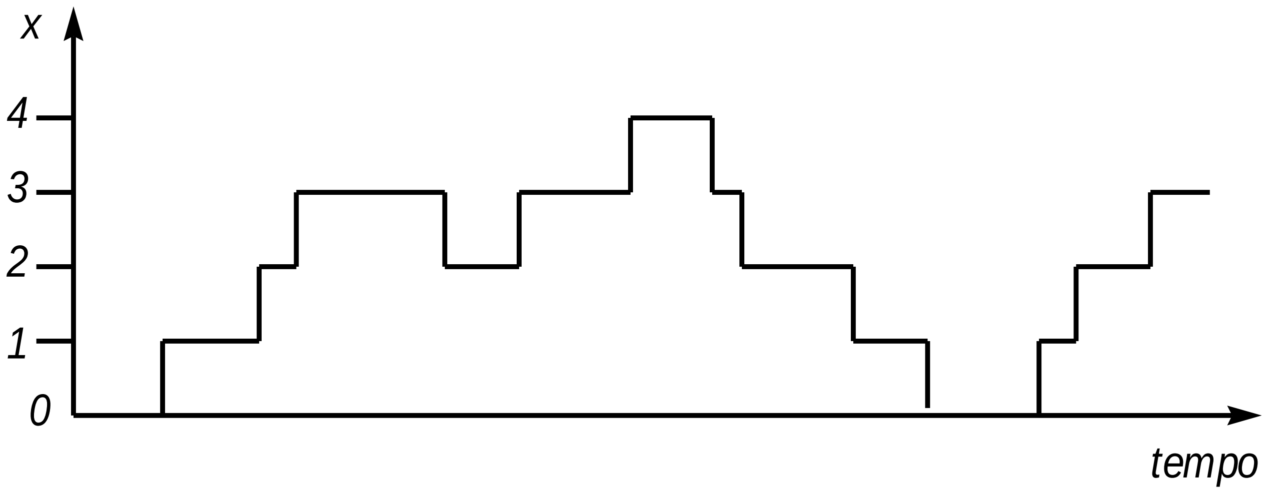
Neste caso o espaço de estados tem dimensão infinita (inteiros positivos com zero) (admitindo um armazém infinito...).

Conjunto dos eventos: $\sigma \in \Sigma = \{p, c\}$ p =partida, c =chegada

Grafo de transição de estado no exemplo do armazém:



Evolução temporal do estado:



O estado evolui assincronamente, guiado pelos eventos.

Sistemas guiados pelo tempo e guiados por eventos

(*Time driven* e *Event Driven*)

Sistemas guiados pelo tempo: Há um relógio (discreto ou contínuo) e as transições só acontecem quando o tempo passa (sistemas de estado contínuo modelados por equações diferenciais ou de diferenças);

Ex.: $x(k+1) = 0{,}8x(k) \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ (tempo discreto)

Ex.: $\frac{dx}{dt} = -2x(t), \qquad t \in \mathbb{R}_0^+$ (tempo contínuo

Sistemas guiados por eventos: As transições de estado ocorrem assincronamente, apenas quando ocorrem os eventos.

Linguagens

Linguagens: Conjunto de todas as sequências de eventos possíveis.

Comportamento lógico do sistema, garantindo que uma dada ordenação de eventos acontece de acordo com o especificado, ou que um dado estado pode ser atingido ou não.

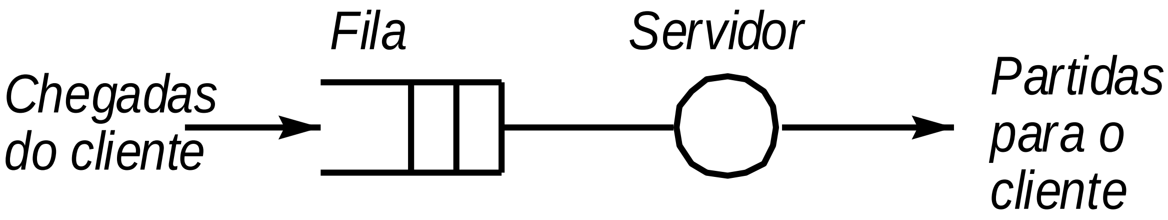
Linguagens temporizadas: Conjunto de todas as sequências temporizadas de eventos (eventos e tempo em que ocorrem) possíveis. Ex. Podemos completar uma dada sequência de eventos dentro de um dado período de tempo?

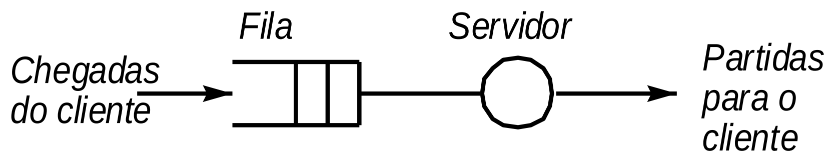
Linguagens temporizadas estocásticas: Linguagens temporizadas em que se inclui informação estatística sobre os possíveis trajetos do estado.

Exemplo de Sistemas de acontecimentos discretos: Filas de espera

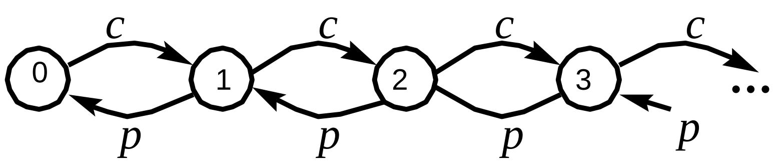
Elementos básicos de um sistema de fila de espera:

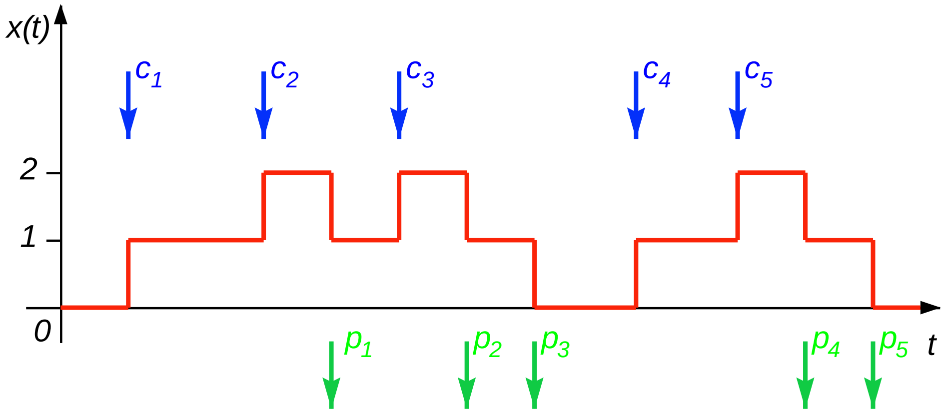
- **Clientes**: As entidades que esperam para usar os recursos.
- **Servidores**: Os recursos pelos quais os clientes esperam. Normalmente fornecem um serviço.
- **Fila**: O espaço onde é feita a espera.
- **A disciplina**: Regras que ditam a ordem de atendimento (*e. g.* FIFO).



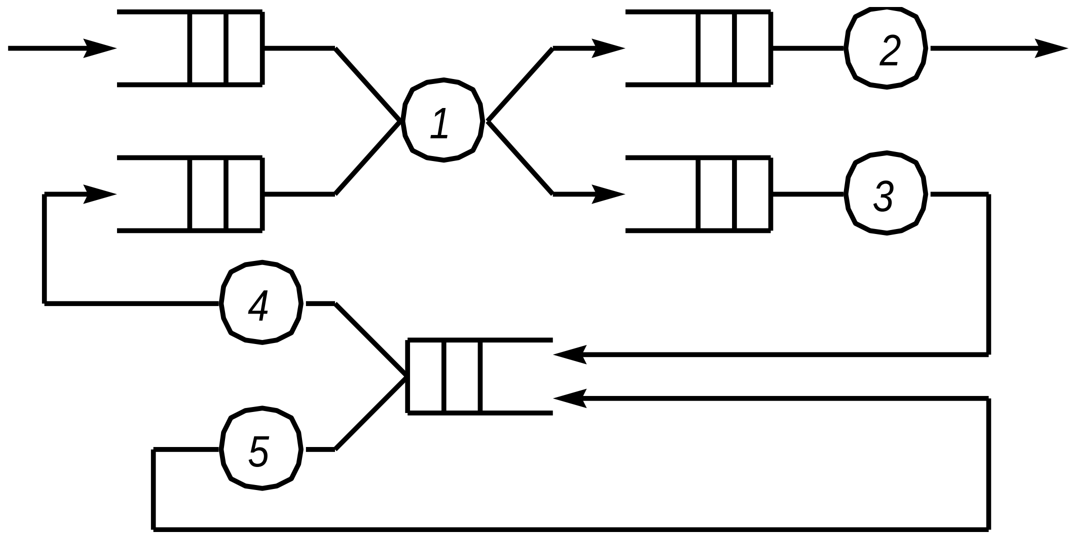


- Eventos: $\{c, p\}$ c = *chegadas* p = partidas
- Espaço de estados: $X = \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}$





Rede de filas de espera



O modelo de fila de espera pode ser usado como um bloco básico de modelos mais complexos (“redes de filas de espera”).

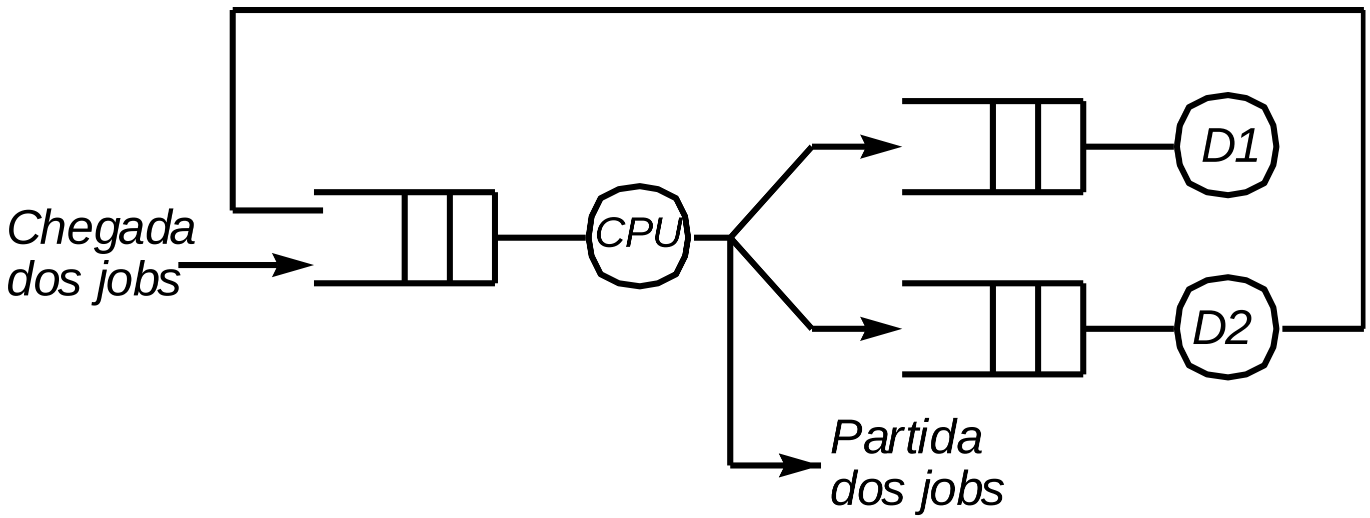
Repare-se que um servidor pode receber entradas de várias filas e/ou alimentar várias outras filas.

Ex.: Sistemas computacionais

Num sistema computacional *jobs*, *tasks*, ou *transactions* são os clientes que competem pela atenção dos servidores (CPU, periféricos – impressoras, discos, ...).

Quando um servidor está ocupado no momento do pedido do cliente, este é colocado em filas de espera, que são parte integrante do sistema computacional.

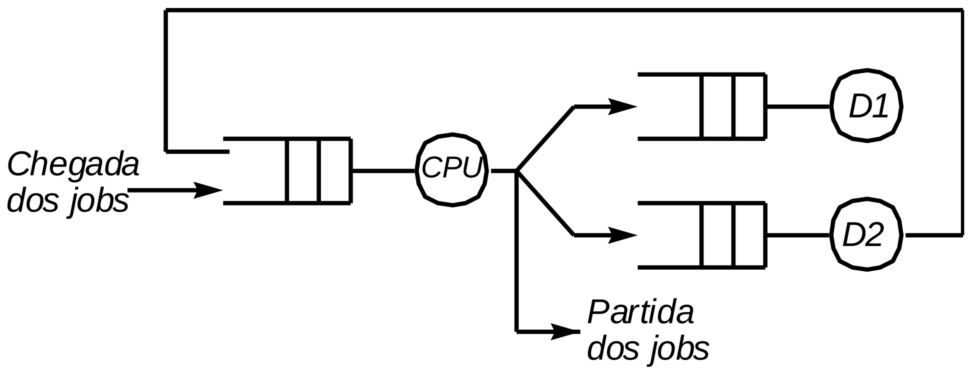
Modelo de filas de espera de um sistema computacional:



Os *jobs* chegam à fila de espera da CPU.

Uma vez servidos pela CPU, ou partem ou pedem acesso a um de dois discos.

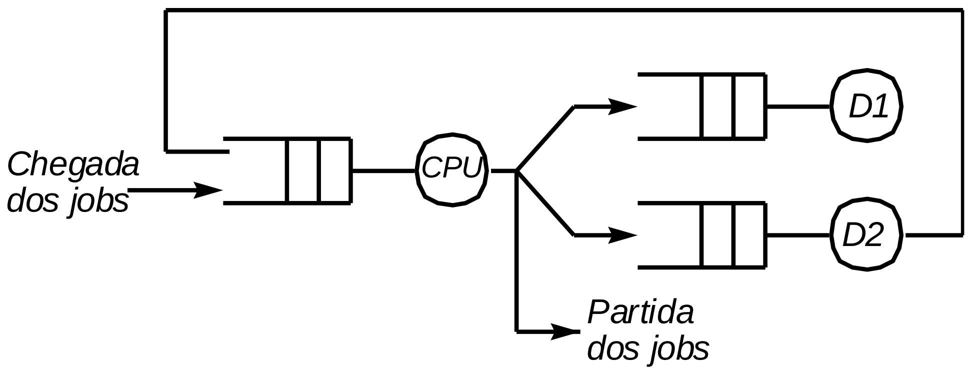
Regressam então para mais serviço na CPU.



Conjunto de acontecimentos (chegadas e partidas dos vários servidores):

$$E = \{a, d, r_1, r_2, d_1, d_2\}$$

- a = chegada do mundo exterior ao sistema computacional
- d = partida da CPU para o mundo exterior
- $r_1,\ r_2$= partidas da CPU encaminhadas para os discos 1 ou 2
- $d_1,\ d_2$=partidas dos discos 1 e 2 que retornam sempre à fila da CPU



Uma representação de **estado** possível consiste nos comprimentos das 3 filas da CPU e dos discos 1 e 2:

$$x = [x_{CPU},\ x_1,\ x_2]^T$$

Neste caso, o espaço de estado é

$$X = \{[x_{CPU} \quad x_1 \quad x_2] : x_{CPU}, x_1, x_2 \geq 0\}$$

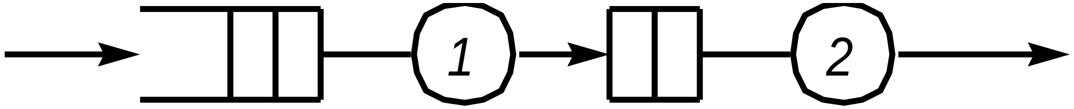
Ex.: Sistemas de manufatura

Os **clientes** de um processo de manufatura são *partes produzidas* ou *peças*.

Servidores:

- Máquinas que efetuam operações específicas;
- Equipamentos de movimentação (tapetes de transporte, AGV's, etc.)

Ex.: Cadeia de máquinas com uma fila finita



Conjunto de eventos:

$$E = \{a, c_1, d_2\}$$

- a = chegada do mundo exterior à primeira máquina
- c_1= serviço da primeira máquina completo
- d_2= partida da segunda máquina

Estado: Comprimentos de cada uma das duas filas.

Simulação de sistemas de eventos discretos

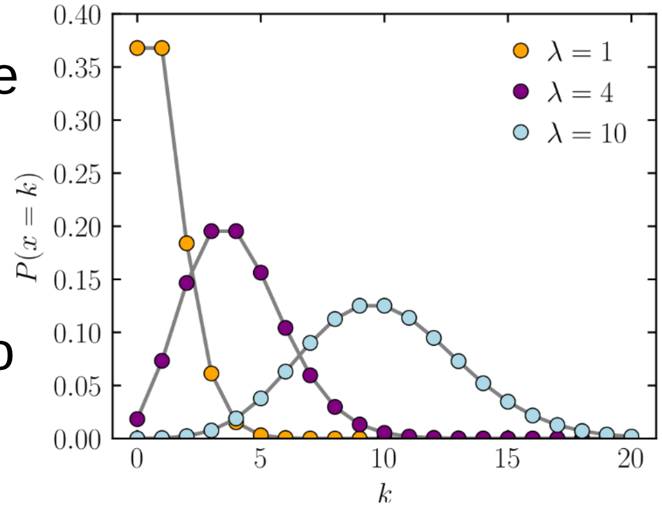
Exemplo para uma fila de espera simples.

Ciclo:

1. Simular a ocorrência do próximo evento
   a. Simular o tipo de evento (chegada ou partida)
   b. Simular o instante de ocorrência do evento
2. Simular a ação associada ao evento
   a. Se “chegada”, incrementar o estado
   b. Se “partida”, simular a ação correspondente do servidor e decrementar o estado
3. Voltar a 1.

Distribuição de Poisson

- distribuição de probabilidade discreta
- probabilidade de um determinado número de eventos ocorrer num intervalo de tempo fixo, se esses eventos ocorrerem com uma taxa média constante conhecida e independentemente do tempo desde o último evento.



- λ é a média da distribuição; $p(k;\, \lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

Exemplo: um *call center* recebe em média 180 ligações por hora. As ligações são independentes; receber uma não altera a probabilidade de quando a próxima chegará.

Geração de números aleatórios

A geração de números aleatórios com uma dada distribuição faz-se transformando adequadamente números aleatórios com uma distribuição uniforme.

Exemplo: distribuição gaussiana

Sejam U_1 e U_2 números aleatórios independentes, com uma distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$.

$$Z_1 = \sqrt{-2 \ln\ U_1} \cos(2\pi U_2), \qquad Z_2 = \sqrt{-2 \ln\ U_1} \sin(2\pi U_2)$$

São dois números independentes, com distribuição normal standard (média nula e variância unitária).

Exemplo: Gerar números com a distribuição de **Poisson** a partir de números aleatórios com distribuição uniforme

Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/Poisson_distribution#Evaluating_the_Poisson_distribution

```
algorithm poisson random number (Knuth):
    init:
        Let L ← e^(−λ), k ← 0 and p ← 1.
    do:
        k ← k + 1.
        Generate uniform random number u in [0,1] and let p ← p × u.
    while p > L.
    return k − 1.
```

Cadeias de Markov

Uma cadeia de Markov de ordem n é descrita por:

- Um conjunto de n estados $\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$
- Um estado inicial especificado
- Um conjunto de probabilidades de transição $a_{i,j}$, $i, j = 1, \ldots, n$

O processo pode apenas estar num estado em cada instante de tempo. Se, no instante k o processo está no estado S_i, no instante $k+1$ está no estado S_j com probabilidade $a_{i,j}$.

Cadeias de Markov e Sistemas de Acontecimentos Discretos

As cadeias de Markov têm em comum com os sistemas de acontecimentos discretos o facto de terem um estado discreto e de as transições de estado serem desencadeadas por um acontecimento (havendo uma descrição probabilística nas cadeias de Markov).

Há no entanto uma diferença significativa: Ao contrário dos sistemas de acontecimentos discretos, nas cadeias de Markov admite-se que as transições de estado ocorrem sincronamente com instantes discretos, que por simplicidade se consideram indexados aos números inteiros.

Exemplo: Modelo do clima

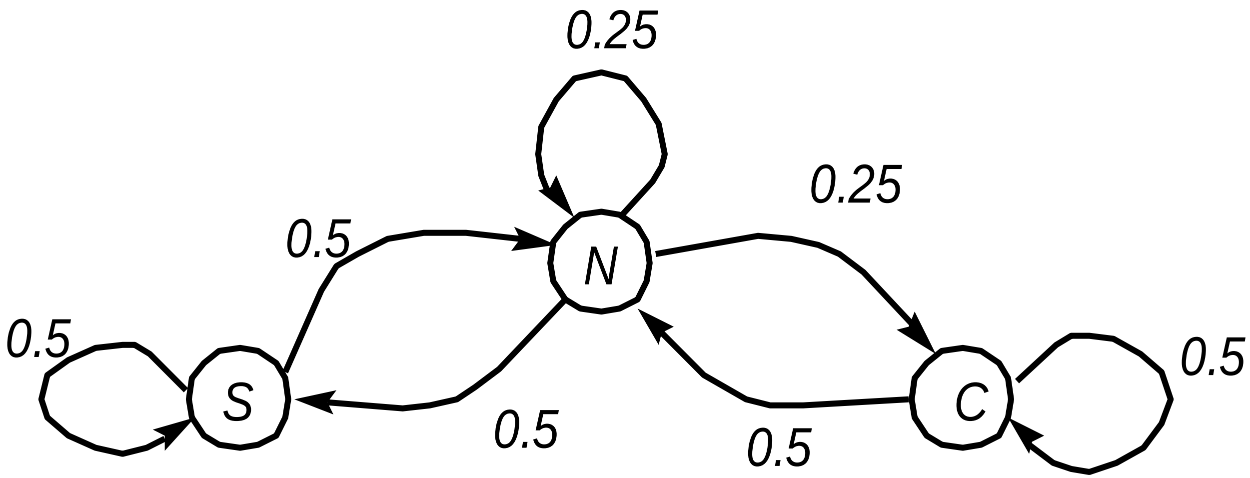
O clima de Smallvile (terra natal do Super-Homem) pode ser caracterizado como estando nos estados Solarento, Nebuloso ou Chuvoso.

- Se está solarento num dia, então o sol ou as nuvens são igualmente prováveis no dia a seguir.
- Se está nebuloso, há uma probabilidade de 50% de o dia seguinte ser solarento, de 25% de ser Nebuloso e de 25% de ser Chuvoso.
- Se estiver Chuvoso, há uma probabilidade de 50% de o dia a seguir ser Nebuloso e de 50% de ser Chuvoso.

As variações do clima de Smallvile podem ser representadas pela tabela

	S	N	C
S	0.5	0.5	0
N	0.5	0.25	0.25
C	0	0.5	0.5

As linhas da tabela somam 1 pois de um estado vai-se sempre para outro



Exemplo: Modelo de aprendizagem de Estes

Relativamente à aprendizagem de uma tarefa simples, um indivíduo pode estar num dois possíveis estados:

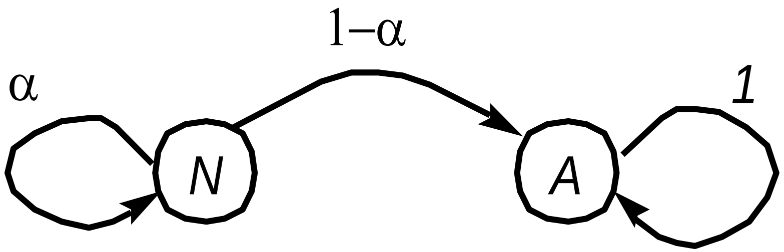
- A = aprendeu
- N = não aprendeu

Admite-se que quando o indivíduo aprende a tarefa, não a esquece.

Se ainda não aprendeu, há uma probabilidade α, com $0 < \alpha < 1$ que aprenda durante o próximo período de tempo.

Modelo de aprendizagem de Estes: Modelo de Markov

	A	N
A	1	0
N	α	$1-\alpha$



Matrizes estocásticas

As probabilidades de transição de uma cadeia de Markov podem ser vistas como os elementos de uma matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Cada uma das entradas da matriz é **não negativa**.
- A **soma** dos elementos de cada **linha é igual a 1**.

Por estes dois factos a matriz diz-se uma matriz estocástica.

Vetores de probabilidade

Um vetor de probabilidade é um vetor tal que

- Todas as suas componentes são não negativas;
- A soma de todas as componentes é igual a 1.

Pode mostrar-se facilmente (problema) que se x^T é um vector linha de probabilidade e A é uma matriz probabilística, então $x^T A$ também é um vector de probabilidade.

Os vetores de probabilidade são assim transformados em vetores de probabilidade pela multiplicação por matrizes estocásticas.

Processo de transição

Seja $P_j(k)$ a probabilidade de se estar no estado S_j no instante k e

$$P^T(k) = [P_1(k) \quad \cdots \quad P_n(k)]$$

Este vetor evolui do seguinte modo

$$P^T(k+1) = P^T(k)A$$

ou, transpondo e usando o facto de que $(MN)^T = N^T M^T$:

$$P(k+1) = A^T P(k)$$

Em q passos, tem-se:

$$P(k+q) = (A^T)^q P(k)$$

$$P^T(k+1) = P^T(k)A$$

$$[P_1(k+1) \quad \cdots \quad P_n(k+1)]$$

$$= [P_1(k) \quad \cdots \quad P_n(k)] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

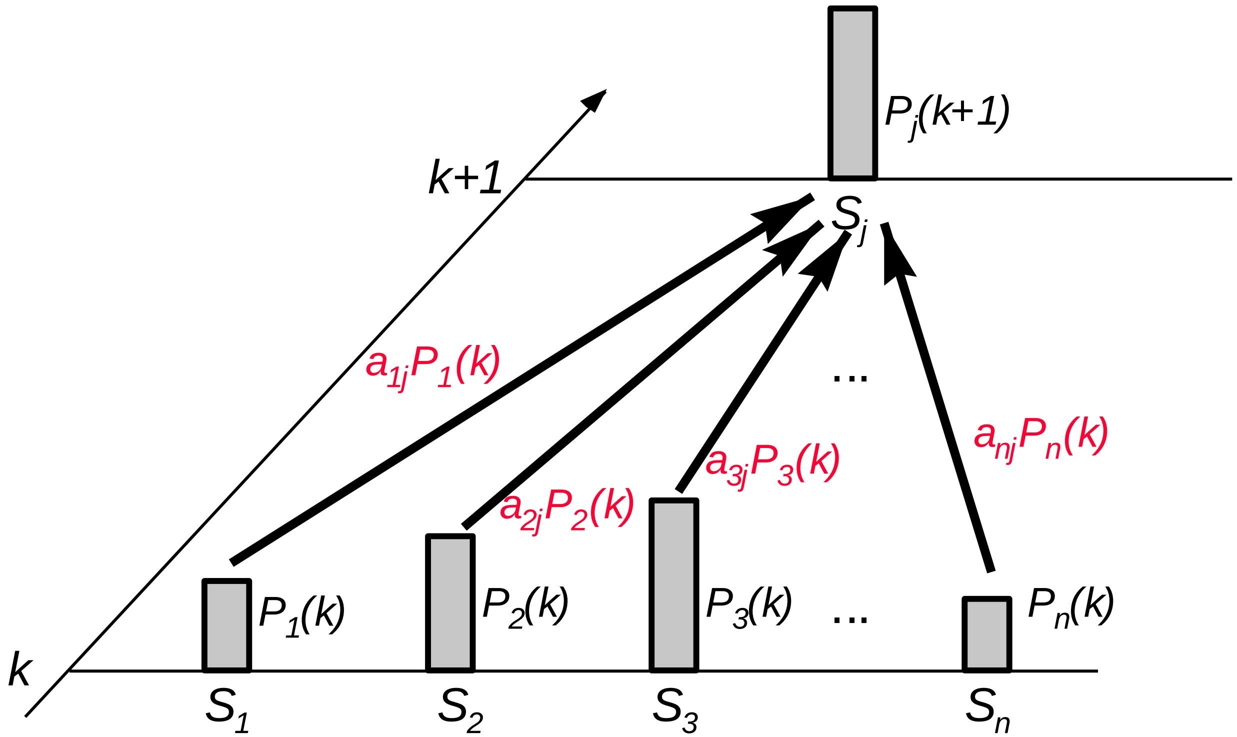
O elemento $P_j(k+1)$ é dado pelo produto interno de $P^T(k)$ e da coluna j:

$$P_j(k+1) = P_1(k)a_{1j} + P_2(k)a_{2j} + \cdots + P_n(k)a_{nj}$$

que tem uma interpretação probabilística clara.

Interpretação probabilística

$$P_j(k+1) = P_1(k)a_{1j} + P_2(k)a_{2j} + \cdots + P_n(k)a_{nj}$$



A expressão

$$P_j(k+1) = P_1(k)a_{1j} + P_2(k)a_{2j} + \cdots + P_n(k)a_{nj}$$

tem a interpretação probabilística: A probabilidade de estar no estado S_j no instante $k+1$ é a soma das probabilidades dos seguintes acontecimentos mutuamente exclusivos e que cobrem todas as hipóteses:

Estar no estado S_1 no instante k e transitar para o estado S_j, ou

Estar no estado S_2 no instante k e transitar para o estado S_j, ou

....

Estar no estado S_n no instante k e transitar para o estado S_j.

Cadeias de Markov Regulares e comportamento limite

Uma cadeia de Markov diz-se regular sse $A^m > 0$ para algum inteiro positivo m. (diz-se que uma matriz M é positiva, $M > 0$, se todas as suas entradas são positivas; não confundir com matrizes definidas positivas).

Teorema (distribuição de equilíbrio)

Seja A a matriz de transição de uma cadeia de Markov regular. Quando $k \to \infty$, a distribuição de probabilidades dos estados tende para um valor limite P que satisfaz o sistema de equações lineares

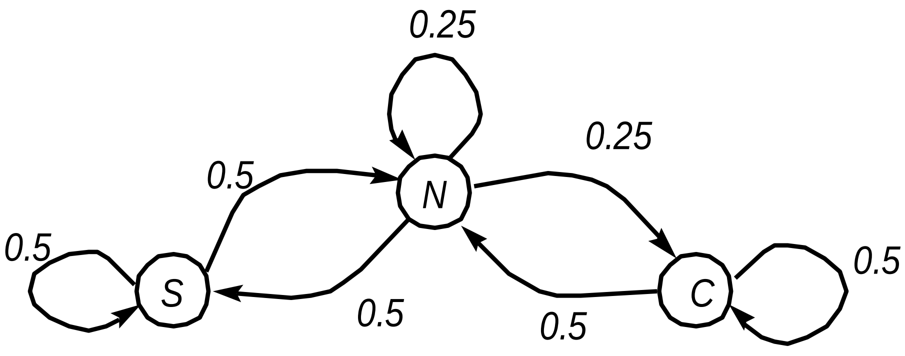
$$P^T = P^T A \qquad \text{ou, de modo equivalente} \qquad A^T P = P$$

Pode mostrar-se que, para cadeias de Markov regulares:

- Começando com qualquer distribuição inicial de probabilidade dos estados, após um número muito grande de passos, a probabilidade de estar nos diversos estados é dada por P, que verifica $P^T = P^T A$.
- A distribuição de probabilidades ao fim de muitos passos é independente da distribuição inicial.

Exemplo: Modelo de transição do tempo

	S	N	C
S	0.5	0.5	0
N	0.5	0.25	0.25
C	0	0.5	0.5



$$A = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}25 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

$P^T(k+1) = P^T(1)A^k$ quando $k \to \infty$, $P(k) \to P$, solução de $P^T = P^T A$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,375 & 0,125 \\ 0,375 & 0,438 & 0,187 \\ 0,250 & 0,375 & 0,375 \end{bmatrix}$$

Como todas as entradas de A^2 são positivas, conclui-se que a cadeia de Markov do tempo é regular, pelo que a distribuição de probabilidade tende para a distribuição de equilíbrio.

Podemos calcular aproximadamente a distribuição de equilíbrio calculando A^k com k muito elevado e usar uma distribuição inicial de probabilidade arbitrária.

Exemplo:

$$A^{16} = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 \end{bmatrix}$$

Começando com uma distribuição inicial $[p_1 \quad p_2 \quad 1-p_1-p_2]$, com p_1 e p_2 quaisquer (entre 0 e 1):

$$[p_1 \quad p_2 \quad 1-p_1-p_2] \begin{bmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 \end{bmatrix} =$$

$$[0,4(p_1+p_2+(1-p_1-p_2) \quad 0,4(p_1+p_2+(1-p_1-p_2) \quad 0,2(p_1+p_2+(1-p_1-p_2)]$$

$$= [0,4 \quad 0,4 \quad 0,2]$$

A distribuição de equilíbrio é independente de p_1 e p_2.

Uma outra maneira é usar $A^T P = P$

$$\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}25 & 0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

com a condição inicial $p_1 + p_2 + p_3 = 1$

Conduz a (apenas 3 equações são independentes):

$$0{,}5p_1 + 0{,}5p_2 = p_1$$

$$0{,}5p_1 + 0{,}25p_2 + 0{,}5p_3 = p_2$$

$$0{,}25p_2 + 0{,}5p_3 = p_3$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

Uma outra possibilidade para estimar a evolução no tempo das probabilidades dos diferentes estados é o Método de Monte Carlo.