



COEFICIENTES INDETERMINADOS

Seja  $p(\lambda)$  um polinómio e considere a equação diferencial

$$(1) \quad p(D)y = f(t)e^{\alpha t},$$

onde  $f(t)$  é um polinómio e  $D$  é o operador de derivação. Existe um método algébrica que se chama *coeficientes indeterminados* que produz uma solução particular. Se  $\alpha$  não é uma raiz do polinómio  $p(\lambda)$  procuramos uma solução de forma

$$(2) \quad g(t)e^{\alpha t}$$

onde  $g(t)$  é um polinómio do mesmo grau de  $f(t)$ . Se  $\alpha$  é uma raiz de  $p(\lambda)$  de multiplicada  $s$ , então procuramos uma solução de forma

$$(3) \quad t^s \cdot g(t)e^{\alpha t}$$

onde  $g(t)$  é um polinómio do mesmo grau de  $f(t)$ .

1. **Lema.** Para  $n > 0$  e  $G(t)$  uma função de classe  $C^n$  tem-se

$$D^n [G(t)e^{\alpha t}] = \left[ \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} G^{(k)}(t) \alpha^{n-k} \right] e^{\alpha t}$$

*Demonstração.* Para  $n = 1$  tem-se

$$D[G(t)e^{\alpha t}] = G'(t)e^{\alpha t} + \alpha G(t)e^{\alpha t} = [G(t) + G(t)'\alpha] e^{\alpha t}$$

Agora vamos supor que  $n > 1$  e

$$D^{n-1} [G(t)e^{\alpha t}] = \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} G^{(k)}(t) \alpha^{n-1-k} \right] e^{\alpha t}.$$

Temos então

$$\begin{aligned} D^n [G(t)e^{\alpha t}] &= D \left( D^{n-1} [G(t)e^{\alpha t}] \right) \\ &= D \left( \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} G^{(k)}(t) \alpha^{n-1-k} \right] e^{\alpha t} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} G^{(k+1)}(t) \alpha^{n-1-k} e^{\alpha t} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} G^{(k)}(t) \alpha^{n-k} e^{\alpha t} \end{aligned}$$

sendo  $j = k + 1$

$$\begin{aligned}
 &= \left[ \sum_{j=1}^n \frac{(n-1)!}{(j-1)!(n-j)!} G^{(j)}(t) \alpha^{n-j} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} G^{(k)}(t) \alpha^{n-k} \right] e^{\alpha t} \\
 &= [G(t) \alpha^n \\
 &\quad + \sum_{j=1}^{n-1} \left( \frac{(n-1)!}{(j-1)!(n-j)!} + \frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!} \right) G^{(j)}(t) \alpha^{n-j} \\
 &\quad \quad \quad + G^{(n)}(t)] e^{\alpha t}.
 \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
 \frac{(n-1)!}{(j-1)!(n-j)!} + \frac{(n-1)!}{j!(n-(j+1))!} &= (n-1)! \frac{(j-1)!(n-j)! + j!(n-(j+1))!}{(j-1)!(n-j)!j!(n-(j+1))!} \\
 &= (n-1)! \frac{(n-j)! + j(n-(j+1))!}{(n-j)!j!(n-(j+1))!} \\
 &= (n-1)! \frac{(n-j) + j}{(n-j)!j!} \\
 &= \frac{n!}{(n-j)!j!}
 \end{aligned}$$

para  $0 < j < n$ , segue

$$D^n [G(t)e^{\alpha t}] = \left[ \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} G^{(k)}(t) \alpha^{n-k} \right] e^{\alpha t}$$

□

**2. Corolário.** Para um polinómio  $p(\lambda) = \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k$  de grau  $n \geq 0$  e uma função  $f(t)$  de classe  $C^n$ , tem-se

$$(4) \quad p(D) [f(t)e^{\alpha t}] = \left[ \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t) \cdot p^{(k)}(\alpha)}{k!} \right] e^{\alpha t}$$

*Demonstração.* Pelo Lema 1 temos

$$\begin{aligned}
 p(D) [f(t)e^{\alpha t}] &= \sum_{j=0}^n a_j D^j [f(t)e^{\alpha t}] \\
 &= \sum_{j=0}^n a_j \left[ \sum_{k=0}^j \frac{j!}{k!(j-k)!} f^{(k)}(t) \alpha^{j-k} \right] e^{\alpha t} \\
 &= \sum_{k=0}^n f^{(k)}(t) \left[ \sum_{j=k}^n a_j \frac{j!}{k!(j-k)!} \alpha^{j-k} \right] e^{\alpha t} \\
 &= \sum_{k=0}^n f^{(k)}(t) \left[ \frac{1}{k!} \sum_{j=k}^n a_j \frac{j!}{(j-k)!} \alpha^{j-k} \right] e^{\alpha t} \\
 &= \left[ \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t) \cdot p^{(k)}(\alpha)}{k!} \right] e^{\alpha t}
 \end{aligned}$$

□

3. **Exemplo.** Determine a solução geral de

$$(5) \quad y'' + y = t \cos(2t).$$

Considere a equação

$$(6) \quad y'' + y = te^{i2t}.$$

A parte real de  $te^{i2t}$  é  $t \cos 2t$  e os coeficientes da equação são reais, segue que a parte real de cada solução de (6) é uma solução de (5). Cada solução de (6) é uma solução da equação homogénea

$$(7) \quad (D - i2)^2(D - i)(D + i)(y) = 0.$$

Segue que a solução de (5) e da forma  $c_1 \cos t + c_2 \sin t + y_p$ , com  $y_p$  igual à parte real de uma função de forma  $(At + B)e^{i2t}$ . Aplicando (4) ao polinómio  $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$  e obtemos

$$\begin{aligned}
 p(D)[(At + B) \cdot e^{i2t}] &= [(i2)^2 + 1](At + B) + (2(i2))A]e^{i2t} \\
 &= [-3(At + B) + i4 \cdot A]e^{i2t}
 \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
 -3(At + B) + 4iA &= t \\
 A &= -1/3 \\
 B &= -4i/9,
 \end{aligned}$$

4

Para  $y_p = \operatorname{Re} \left[ \left( -\frac{t}{3} - \frac{4i}{9} \right) e^{i2t} \right]$  obtemos a solução geral de (5)

$$y = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t - \frac{t}{3} \cos(2t) + \frac{4}{9} \operatorname{sen}(2t).$$

4. **Exemplo.** Determine a solução geral de

$$(8) \quad y'' + y = t^2 \operatorname{sen}(t).$$

Considere a equação

$$(9) \quad y'' + y = (D^2 + 1)(y) = t^2 e^{it}.$$

A parte imaginária de  $t^2 e^{it}$  é  $t^2 \operatorname{sen}(t)$  e os coeficientes da equação são reais, segue que a parte imaginária de cada solução de (9) é uma solução de (8). Como  $i$  é uma raiz de ordem 1 do polinóio  $\lambda^2 + 1$ , segue que a solução de (8) é da forma  $c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t + y_p$ , com  $y_p$  a parte imaginária de uma função  $t \cdot (At^2 + Bt + C)e^{it}$ . Aplicando (4) com  $f(t) = At^3 + Bt^2 + Ct$  obtemos

$$(D^2 + 1)[f(t)e^{it}] = [2i(3At^2 + 2Bt + C) + 6At + 2B]e^{it}$$
$$2i(3At^2 + 2Bt + C) + 6At + 2B = t^2$$

$$A = -i/6$$

$$B = 1/4$$

$$C = i/4.$$

Para  $y_p = \operatorname{Im} \left[ \left( -\frac{t^3}{6}i + \frac{t^2}{4} + \frac{t}{4}i \right) e^{it} \right]$  obtemos a seguinte solução geral de (8).

$$y = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t + \left( -\frac{t^3}{6} + \frac{t}{4} \right) \cos(t) + \frac{t}{4} \operatorname{sen}(t)$$