Caso 5.1

I - Um tanque 0,6 m^2 de área de base e 1,5 m de altura é alimentado com 4 L/s de água, sendo descarregado através duma conduta, com 5 cm^2 de secção recta, colocada no fundo do tanque. A velocidade de descarga é função da altura de fluido no tanque: $v = 80 \cdot h \cdot d$ (m/s) sendo d e h, respectivamente, a densidade (expressa em g/cm3) e a altura (expressa em m) do fluido contido no tanque.

Admita que inicialmente o tanque contém apenas água, até metade da sua altura.

a) O tanque enche, esvazia completamente ou atinge-se um nível estacionário de líquido?

b) Determinar o tempo necessário para se atingir a situação identificada na alínea anterior.

II - Noutra ocasião o mesmo tanque está cheio até 1 m de altura, com uma suspensão contendo 12% (m/m) dum sólido cuja densidade real é de 2,5. Nesse instante inicia-se a alimentação de 4 L/s de uma suspensão a 2% do mesmo sólido, controlando-se agora o caudal de saída, por meio de uma válvula, de modo a manter o nível constante.

a) Sabendo que as densidades das suspensões a 2 e 12% são, respectivamente, 1,012 e 1,078, estabelecer a evolução no tempo da densidade da corrente de saída do tanque.

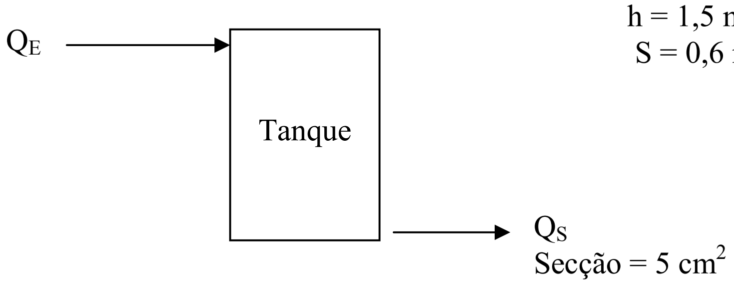
b) Determinar a densidade e o teor de sólidos no tanque ao fim de 100 segundos de operação.

III – Considere de novo que o tanque está inicialmente cheio até 1 m de altura com a mesma suspensão (12% de sólidos). Pela conduta superior inicia-se a alimentação de 4 L/s de água, não se controlando o caudal de saída, pelo que a velocidade de descarga continua a ser dada por $v = 80 \cdot h \cdot d$ (m/s), tal como indicado no ponto I.

a) O tanque enche ou esvazia? Justifique a resposta.

b) Em que condições (defina-as) existe um estado estacionário? Justifique.

Este problema pode ser descrito pelo esquema abaixo:



h = 1,5 m
S = 0,6 m^2

<u>Nota:</u> Este problema vai ser resolvido em "m" e "seg". Também podia ser resolvido em "dm" ou "cm". O importante é definir-se de início quais as unidades que se vão considerar.

<u>Alínea I-a) O tanque enche ou esgota ?</u>

$Q_E = 4$ L/s $= 0{,}004$ m^3/s

h = ho / 2 = 1,5 / 2 = 0,75 m

$v_S = 80 \times h \times d = 80 \times 0{,}75 \times 1 = 60$ m/s

Sendo d a densidade em g/cm^3, h a altura em m e vindo o resultado final em m/s.

Nota: A densidade é adimensional.

$$\mathbf{d} = \frac{\text{massa específica}}{\text{massa específica da água}} = \frac{\text{massa específica}}{1\text{g/cm}^3}$$

Assim podemos considerar a densidade expressa em g/cm^3 ou kg/L

Secção do tubo = St = 5 cm^2 = 0,0005 m^2

$Q_S = v_S \times St = 60 \times 0{,}0005 = 0{,}03$ m^3/s

$Q_S = 0{,}03$ m^3/s $> Q_E = 0{,}004$ m^3/s → o tanque esgota

<u>No equilíbrio:</u>

$Q_S = Q_E = 0{,}004 = 80 \times h \times 1 \times 0{,}0005$ → h = 0,1 m – altura de esquilíbrio ou nível estacionário

Alínea I-b) Tempo que demora a atingir-se o nível estacionário

Balanço em volume $\mathbf{Q_E = Q_S + \frac{dV}{d\theta}}$ $\mathbf{Q_E = Q_S + S\frac{dh}{d\theta}}$

$$\mathbf{Q_E = v_S \times S_t + S\frac{dh}{d\theta}}$$

Sendo θ o tempo.

$$0{,}004 = 80 \times \mathbf{h} \times 0{,}0005 + 0{,}6\,\frac{\mathbf{dh}}{\mathbf{d\theta}}$$

$$0{,}004 - 0{,}04\,\mathbf{h} = 0{,}6\,\frac{\mathbf{dh}}{\mathbf{d\theta}}$$

$$\int_0^{\theta} \mathbf{d\theta} = 0{,}6 \int_{0{,}75}^{0{,}1} \frac{\mathbf{dh}}{0{,}004 - 0{,}04\,\mathbf{h}}$$

$$\theta = \frac{0{,}6}{-0{,}04}\left(\ln\left|0{,}004 - 0{,}04 \times 0{,}1\right| - \ln\left|0{,}004 - 0{,}04 \times 0{,}075\right|\right)$$

$$\theta = \frac{0{,}6}{-0{,}04}\left(\ln|0| - \ln|0{,}026|\right)$$

Chega-se a uma indeterminação, ln(0). Para evitar essa situação adiciona-se um pequeno acréscimo ao limite superior do integral. Por exemplo 0,0001 m. Vem:

$$\int_0^{\theta} \mathbf{d\theta} = 0{,}6 \int_{0{,}75}^{0{,}1001} \frac{\mathbf{dh}}{0{,}004 - 0{,}04\,\mathbf{h}}$$

Integrando obtem-se θ = 131,7 seg = 2 min 11,7 seg

Nota: O resultado obtido depende do acréscimo considerado, mas a variação não é muito grande.

Alínea II-a) Equação da densidade em função do tempo

Agora a altura é constante, h = 1 m. O tanque está cheio duma suspensão a 12 % (m/m) (d = 1,078 g/cm^3) e é alimentado com uma suspensão a 2 % (m/m) (d = 1,012 g/cm^3).

Sabe-se que a densidade do sólido seco é de 2,5 g/cm^3.

Determinar a equação da evolução no tempo da densidade.

$$0{,}004 \times \mathbf{d_E} = 0{,}004 \times \mathbf{d_S} + \mathbf{h} \times \mathbf{S} \times \frac{\mathbf{d\,d_s}}{\mathbf{d\theta}}$$

$$0{,}004 \times 1{,}012 = 0{,}004 \times \mathbf{d_S} + 1 \times 0{,}6 \times \frac{\mathbf{d\,d_s}}{\mathbf{d\theta}}$$

$$1{,}012 = \mathbf{d_S} + 150 \times \frac{\mathbf{d\,d_s}}{\mathbf{d\theta}}$$

Alínea II-b) Calcular a densidade e o teor de sólidos dentro do tanque ao fim de 100 seg

$$1{,}012 - \mathbf{d_S} = 150 \times \frac{\mathbf{d\,d_s}}{\mathbf{d\theta}}$$

$$\int_0^{100} \mathbf{d\theta} = 150 \int_{1{,}078}^{\mathbf{d_S}} \frac{\mathbf{d\,d_S}}{1{,}012 - \mathbf{d_S}}$$

$$\frac{100}{150} = -\ln \frac{1{,}012 - \mathbf{d_S}}{1{,}012 - 1{,}078} \qquad \frac{100}{150} = 0{,}6667$$

$$\exp(-0{,}6667) = \frac{1{,}012 - \mathbf{d_S}}{1{,}012 - 1{,}078} \qquad \rightarrow\ d_S = 1{,}046\ \text{g/cm}^3$$

Definição de densidade duma suspensão:

$$\mathbf{d} = \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{V}} = \frac{\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2}{\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2} = \frac{\mathbf{M}_1 + (1 - \mathbf{M}_1)}{\frac{\mathbf{M}_1}{2{,}5} + \frac{(1 - \mathbf{M}_1)}{1}} = 1{,}046\ \text{g/cm}^3$$

Resolve-se e obtem-se $M_1 = 0,0733$ que corresponde a 7,33 %

Alínea III-a) O tanque enche ou esgota ?

Na Alínea I o tanque tinha água e entrava água. O nível variou até atingir uma situação de equilibrio.

Na Alínea II o nível era constante só variou a concentração. O caudal volumétrico de entrada e saída eram semelhantes e estávamos perante uma situação de diluição.

A Alínea III é uma mistura das duas. O tanque contem inicialmente uma suspensão. Depois entra água e deixa-se que o nível baixe. Ou seja ocorre diluição e abaixamento do nível.

Altura inicial = 1 m

$Q_E = 0,004 \text{ m}^3/\text{s}$

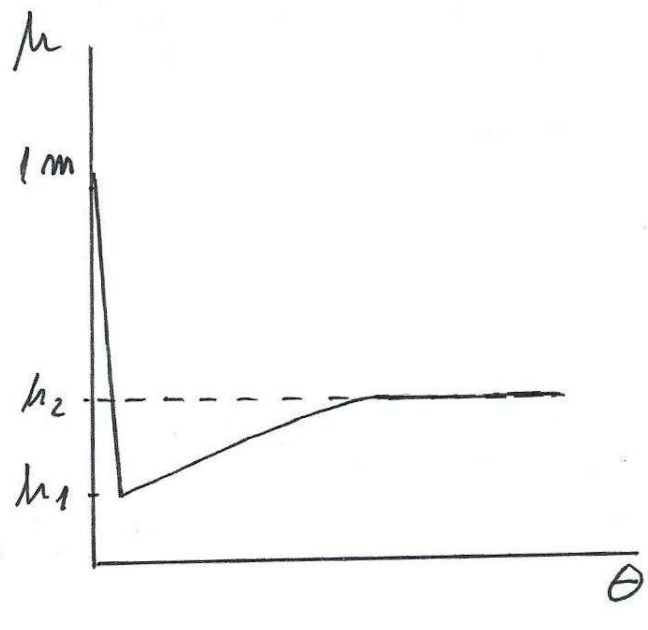
$Q_S = v_S \times St = 80 \times h \times d \times St = 80 \times 1 \times 1,078 \times 0,0005 = 0,0431 \text{ m}^3/\text{s}$

O tanque esgota porque $Q_S = 0,0431$ m3/s $> Q_E = 0,004 \text{ m}^3/\text{s}$

Alínea III-b) condições para estado estacionário

Ocorrem dois fenómenos:

- Esvaziamento enquanto $Q_S > Q_E$. Tal como se viu na alínea I) trata-se dum processo rápido.
- Diluição. Processo muito mais lento.



Assim o nível desce rapidamente até à altura h_1

Ponto 1: $Q_E = Q_S$

$0{,}004 = 80 \times h \times d \times 0{,}0005$

$0{,}004 = 80 \times h \times 1{,}078 \times 0{,}0005 \quad \rightarrow \quad h_1 = 0{,}093$ m

Depois a suspensão vai-se diluindo e a densidade tende gradualmente para um patamar com d = 1 (água pura)

Ponto 2: $Q_E = Q_S$

$0{,}004 = 80 \times h \times d \times 0{,}0005$

$0{,}004 = 80 \times h \times 1 \times 0{,}0005 \quad \rightarrow \quad h_2 = 0{,}1$ m

Este resultado já era expectável. Quando a solução se dilui ficamos nas condições da Alínea I), com altura de equilíbrio igual a 0,1 m.