

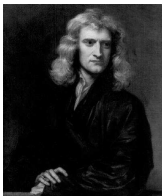
Mecânica Lagrangiana

João Miranda Lemos
jlm1@inesc-id.pt

Instituto Superior Técnico

2021

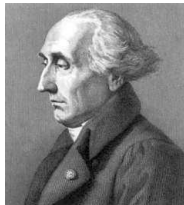
Modelos baseados em Mecânica Lagrangiana



Abordagem Newtoniana baseada em

- Coordenadas cartesianas
- Conhecimento de **todas** as forças aplicadas
- Lei de Newton **para todas as massas**

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum \text{Forças aplicadas}$$



Abordagem Lagrangiana baseada em

- Coordenadas generalizadas
- Energia e acção
- Princípio de Hamilton

Bibliografia sobre Modelação baseada em Mecânica Lagrangiana

[TM2004] Thornton, S. T. e J. B. Marion. *Classical Dynamics of particles and systems*, Thomson, 5ª ed., 2004. Cap. 7, 228-286.

[M2000] Maia, N. *Introdução à Dinâmica Analítica*, IST Press, 2000. Cap. 4, 61-108.

Os dois textos anteriores explicam os temas abordados neste capítulo e incluem muitos problemas e exemplos com diversos níveis de dificuldade.

[EG2003] Egeland, O. e J. T. Gravdahl. *Modelling and Simulation for Automatic Control*, Marine Cybernetics. Sec. 8.2, 313-321.

Um pouco denso, mas contém vários exemplos clássicos de engenharia, por vezes com um grau de dificuldade superior.

[FLS1964] Feynman, Leighton, Sands. *The Feynman lectures on physics*. Basic Books, 2010. Vol. 2, cap. 19, The Principle of Least Action.

Texto introdutório, no estilo inimitável de Feynman, que explica o princípio de acção mínima num contexto da física.

Porquê uma nova abordagem à modelação?

O movimento de uma partícula de massa m num referencial inercial x é corretamente descrito pela lei de Newton $\ddot{x} = F/m$, em que F é a **soma de todas as forças** aplicadas à partícula.



Se a partícula for **constrangida** a deslocar-se numa dada superfície (por exemplo, deslocar-se ao longo de um arame, como na figura), há forças que a mantêm na superfície e que são muito difíceis, ou mesmo impossíveis, de calcular.

Precisamos de uma nova teoria para estas situações.

Essa teoria é o **Princípio de Hamilton** e as equações do movimento resultam da **equação de Euler-Lagrange**.

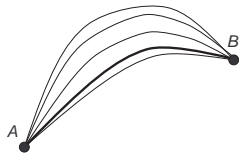
Princípio de Hamilton

Considere-se uma partícula que tem uma velocidade inicial e se desloca entre dois pontos A e B .

Ela pode seguir vários trajetos, mas apenas um deles (marcado a negro) tem realidade física e verifica as leis de Newton.

Este trajeto verifica o [Princípio de Hamilton](#):

De todos os possíveis caminhos que uma partícula se pode deslocar de um ponto para outro num dado intervalo de tempo, o que efetivamente se observa é o que minimiza o integral ao longo do tempo da diferença entre a energia cinética e potencial.



A ação: um funcional

De acordo com o Princípio de Hamilton, a quantidade (denominada ação

$$J = \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0$$

deve ser mínima.

Esta quantidade transforma um trajeto definido pelas coordenadas $x(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$ (ou seja, uma função do tempo) num número real.

A cada trajeto (função) corresponde um número: J é uma função de funções e diz-se um funcional.

O problema consiste pois em encontrar a função $x(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$ que minimiza o valor de J .

Repare-se que não podemos "derivar e igual a zero a derivada": o que é a derivada em ordem a uma função?

Cálculo de variações

Para resolver o problema de minimização associado ao Princípio de Hamilton é necessária uma matemática nova: o **cálculo de variações** ([TM2004], cap. 6).

Seja x^* a função ótima, que corresponde a uma ação J^* .

Seja x uma função que resulta de perturbar ligeiramente x^* (garantindo, por exemplo, que $\int_{t_1}^{t_2} |x^*(\tau) - x(\tau)| d\tau$ é pequeno) e que corresponde a uma ação J .

Então, é possível definir um conceito de variação de 1ª ordem de J (que aproxima $J^* - J$ por termos de 1ª ordem em $x^* - x$, designada δJ e tal que, é condição necessária de ótimo que

$$\delta J = 0.$$

Esta técnica generaliza a condição da derivada ser zero para funções suaves, em pontos interiores do domínio. A aplicação desta condição permite deduzir a equação de **Euler-Lagrange**, verificada pelo trajeto ótimo x^* , que se estuda mais à frente.

A lagrangiana

Define-se a **função lagrangiana**, ou simplesmente **lagrangiana** por

$$L = T - U.$$

Como, para sistemas conservativos, a energia cinética depende apenas da velocidade \dot{x} , e a energia potencial apenas da posição x ,

$$T = T(\dot{x}), \quad U = U(x),$$

a lagrangiana é uma função de x e \dot{x} :

$$L = T(\dot{x}) - U(x) = L(x, \dot{x})$$

O integral de ação, a minimizar em ordem à função x de acordo com o Princípio de Hamilton, é pois

$$J = \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}) dt.$$

Porquê a definição de lagrangiana $L = T - U$?

Teorias da física validadas pelo acordo com os dados experimentais.

A escolha de uma quantidade (a **ação**) que, minimizada, leve a obter modelos adequados para os sistemas mecânicos, é uma história fascinante [C2017] e por vezes com episódios rocambolescos ([L2019], p. 403).

Uma justificação para a escolha da lagrangiana como a diferença entre a energia cinética e potencial é pois, apenas, porque **funciona**.

Outras interpretações mais profundas ([N2011], pp. 47-49):

- Traduz o facto de o valor médio da energia cinética ser aproximadamente igual ao da energia potencial;
- Outra, mais complicada, está baseada na mecânica relativista.

[C2017] J. Coopersmith, *The Lazy Universe*, Oxford, 2017.

[L2019] J. M. Lemos. *Controlo no Espaço de Estados*, IST Press, 2019.

[N2011] D. E. Neuenschwander, *Emmy Noether's Wonderful Theorem*, John Hopkins, 2011.



Uma observação sobre nomenclatura

Em matemática e física, a expressão **lagrangiana** tem três significados diferentes, que não devem ser confundidos:

- A função integranda no integral de custo do **princípio de Hamilton** (o sentido em que é usada neste curso) ([TM2004], p. 231);
- A função integranda no integral que define o custo em **cálculo das variações** ([B2004], p.263) e **controlo ótimo** ([L2019], p. 413);
- A função que incorpora restrições através de multiplicadores de Lagrange em problemas de **otimização dual** ([BD2004], p. 215).

[B2004] B. van Brunt. *The Calculus of Variations*, Springer, 2004.

[BD2004] S. Boyd e L. Vandenberghe. *Convex Optimization*, Cambridge, 2004.

A equação de Euler-Lagrange – sistemas conservativos

Para sistemas conservativos e sem forças exteriores, a lagrangiana

$$L(x, \dot{x}) = T - U$$

satisfaz as equações de **Euler-Lagrange** (também ditas simplesmente equações de Lagrange)

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

Estas equações definem equações diferenciais ordinárias para as coordenadas $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]$ da partículas que constitui o sistema.

Um exemplo simples: oscilador harmónico

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

Equação EL:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$$

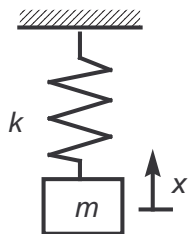
$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}$$

Substituindo na equação EL

$$m\ddot{x} + kx = 0$$



Esta equação pode ser facilmente obtida usando mecânica newtoniana.

Porquê usar a mecânica lagrangiana?

No exemplo anterior as equações podem ser facilmente obtidas usando os métodos da mecânica newtoniana.

A vantagem de usar a mecânica lagrangiana vai revelar-se depois, em sistemas mais complexos que envolvem **restrições** e que são mais naturalmente descritos usando variáveis que não são as variáveis cartesianas, mas sim outras variáveis (por exemplo o espaço percorrido ao longo de um plano inclinado, ou o ângulo de oscilação de um pêndulo) ditas **variáveis generalizadas**.

Antes de considerar estas situações, vamos deduzir a equação EL.

Esta dedução pode parecer complicada, mas com alguma atenção percebe-se bem.

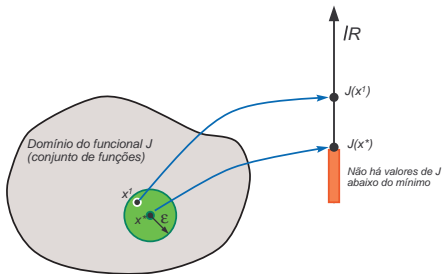
O esforço vale a pena pois os conceitos envolvidos abrem a porta para resolver problemas muito importantes em engenharia.

Mínimos locais de funcionais*

Funcional: A cada função contínua, definida no intervalo $[t_1, t_2]$ atribui um número real positivo.

As **funções** x dentro da bola estão **próximas** do mínimo x^* no sentido em que

$$\int_{t_1}^{t_2} |x(t) - x^*(t)| dt < \varepsilon$$



x^* é um **mínimo local** se

$$\forall x \text{ na bola, então } J(x^*) \leq J(x)$$

Perturbações admissíveis*

Objetivo: Qual a função x contínua, com primeira derivada contínua, definida no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ que a minimiza o funcional de ação?

$$J = \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}) dt \quad \text{Para o trajeto ótimo: } J^* = \int_{t_1}^{t_2} L(x^*, \dot{x}^*) dt$$

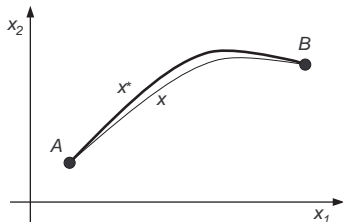
Perturbação admissível

$$x(\alpha, t) = x^*(t) + \alpha\eta(t)$$

$$\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$$

α escalar pequeno. J fica função de α

$$J(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} L(x(\alpha, t), \dot{x}(\alpha, t)) dt$$



Condição de mínimo*

É **condição necessária** (mas não suficiente) para que x^* seja um **mínimo** que, para **todas as perturbações admissíveis** η , se tenha

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0$$

Esta condição pode ser interpretada como impondo que a derivada direcional de J se anule ao longo de todas as direções (definidas por η).

Demonstração da condição de mínimo* (1)

A demonstração é feita por **redução ao absurdo**.

Para simplificar a notação, define-se $g(\alpha) := J(x^* + \alpha\eta)$

Hipótese absurda: $g'(0) \neq 0$

Expandindo em série de Taylor

$$g(\alpha) = g(0) + g'(0)\alpha + o(\alpha)$$

Como $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{o(\alpha)}{\alpha} = 0$, existe $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que, para $|\alpha| < \varepsilon$

$$\left| \frac{o(\alpha)}{\alpha} \right| < |g'(0)| \quad \text{ou seja} \quad |o(\alpha)| < |g'(0)\alpha|$$

Então

$$g(\alpha) - g(0) < g'(0)\alpha + |g'(0)\alpha|$$

Demonstração da condição de mínimo* (2)

$$g(\alpha) - g(0) < g'(0)\alpha + |g'(0)\alpha|$$

Restrinja-se adicionalmente α , de modo a que os seus valores possíveis tenham o sinal negativo de $g'(0)$.

Para estes valores de α

$$g(\alpha) - g(0) < 0 \quad \text{ou seja} \quad g(\alpha) < g(0)$$

o que **contradiz** a hipótese de que $\alpha = 0$ é um mínimo.

Assim, **a hipótese absurda não pode ser verdadeira** (porque leva a uma contradição) e tem de ser $g'(0) = 0$.



Dedução da equação de Euler-Lagrange* (1)

Condição de mínimo: $\frac{\partial J}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = 0$

Funcional perturbado: $J(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} L(x(\alpha, t), \dot{x}(\alpha, t)) dt$

Pela regra de Leibniz para derivar um integral em ordem a um parâmetro

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \alpha} dt$$

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \alpha} \right] dt$$

Regra de Leibniz para derivar um integral em ordem a um parâmetro

Seja

$$G(t) := \int_{a(t)}^{b(t)} f(z, t) dz$$

Então

$$\frac{dG}{dt} = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(z, t)}{\partial t} dz + f(b(t), t) \frac{db}{dt} - f(a(t), t) \frac{da}{dt}$$

Dedução da equação de Euler-Lagrange* (2)

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \alpha} \right] dt$$

$$x(t) = x^*(t) + \alpha \eta(t) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial x}{\partial \alpha} = \eta$$

$$\dot{x}(t) = \dot{x}^*(t) + \alpha \dot{\eta}(t) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \dot{x}}{\partial \alpha} = \dot{\eta}$$

Assim

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial x} \eta + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{\eta} \right] dt$$

Dedução da equação de Euler-Lagrange* (3)

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial x} \eta + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{\eta} \right] dt$$

Regra de **Integração por partes**

$$\frac{d}{dt}(uv) = \dot{u}v + u\dot{v}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} u\dot{v} dt = uv \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{u}v dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{\eta} dt = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \eta \Big|_{t_1}^{t_2}}_{=0} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \eta dt$$

Dedução da equação de Euler-Lagrange* (4)

Do slide anterior

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial x} \eta + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{\eta} \right] dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{\eta} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \eta dt$$

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] \eta dt$$

Pelo lema fundamental do cálculo de variações

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$$

Funções e integrais

Em geral, se

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = 0$$

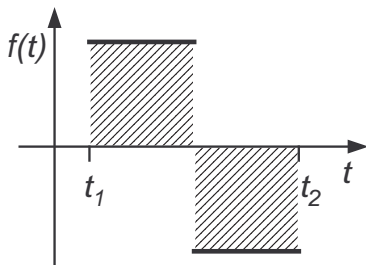
não podemos garantir que

$$f(t) = 0, \quad t_1 \leq t \leq t_2.$$

No caso da demonstração da equação de EL, a situação é no entanto diferente, pois tem-se

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi(t) \eta(t) dt = 0$$

para qualquer função η dentro de uma dada classe.



Lema fundamental do cálculo das variações* (1)

Seja $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua.

Se

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)\eta(t)dt = 0$$

para qualquer η tal que $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$, então

$$\varphi(t) = 0, \quad t_1 \leq t \leq t_2.$$

Lema fundamental do cálculo das variações (demonstração)* (2)

Usa-se o método de redução ao absurdo

Hipótese absurda: Admita-se que existe t_a tal que $\varphi(t_a) \neq 0$.

Por φ ser contínua, existe ε tal que, no intervalo $[t_a - \varepsilon, t_a + \varepsilon]$ se tem $\varphi(t) \neq 0$.

Como η pode ser qualquer função, escolhe-se $\eta(t) = 0$ fora de $[t_a - \varepsilon, t_a + \varepsilon]$ e igual a φ dentro deste intervalo. Deste modo

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)\eta(t)dt = \int_{t_a-\varepsilon}^{t_a+\varepsilon} \varphi^2(t)dt > 0,$$

o que contraria a hipótese deste integral ser nulo.



Graus de liberdade e constrangimentos

Uma **partícula** (ponto material) pode deslocar-se ao longo de 3 coordenadas cartesianas. Dizemos que tem **3 graus de liberdade**

Se tivermos N partículas, o número de graus de liberdade será $3N$.

Se houver m constrangimentos, o número de graus de liberdade será $n = 3N - m$

Exemplo: restrição do movimento de uma partícula ao plano horizontal, $z = 0$; Graus de liberdade $n = 3 - 1 = 2$

Precisamos de $2n$ variáveis (2 posições e 2 velocidades) para descrever o movimento do ponto.

Um **corpo rígido**, no espaço, tem 6 graus de liberdade: pode deslocar-se independentemente ao longo de 3 direções ortogonais e ainda efetuar 3 rotações em torno destes eixos. O número de graus de liberdade de N corpos rígidos é $n = 6N - m$

Coordenadas generalizadas

A descrição de um sistema não se faz necessariamente com coordenadas cartesianas.

Podem ser usadas variáveis, como ângulos, ou distâncias ao longo de determinadas direções.

Coordenadas generalizadas são qualquer conjunto de variáveis que especifique completamente a configuração do sistema.

Por exemplo, um pêndulo desloca-se em 2 dimensões (coordenadas cartesianas), mas é descrito pelo ângulo (coordenada generalizada).

As coordenadas generalizadas designam-se normalmente por

q_1, q_2, \dots, q_n .

Constrangimentos: exemplo

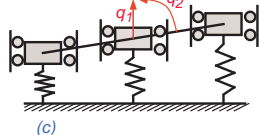
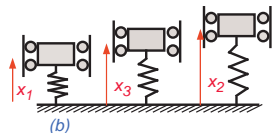
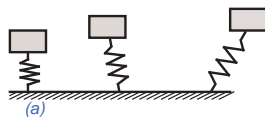
a) Três massas pontuais movem-se independentemente e livremente no plano vertical.

Graus de liberdade =

$$= 2 \text{ coordenadas cartesianas} \times 3 \text{ partículas} = 6$$

b) As massas podem apenas mover-se na vertical. Há $m = 3$ constrangimentos, $n = 6 - 3 = 3$

c) Constrangimento adicional: as massa estão ligadas por uma barra, em torno da qual podem rodar $n = 6 - 4 = 2$



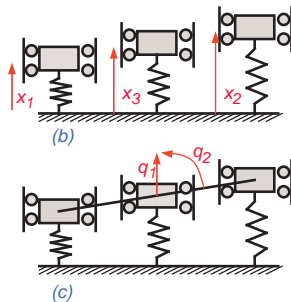
N. Maia, *Introdução à Dinâmica Analítica*, IST Press, 2000, pp. 61-64

Coordenadas generalizadas: exemplo

b) O sistema tem 3 graus de liberdade: basta usar as 3 variáveis x_1 , x_2 e x_3 correspondentes às coordenadas verticais das 3 massas.

c) O sistema passou a ter apenas 2 graus de liberdade. Podemos descrevê-lo:

- Com x_1 e x_2 e calcular x_3 pelas restrição, $x_3 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, ou
- Usar as coordenadas generalizadas q_1 e q_2



Relação entre as coordenadas cartesianas e as coordenadas generalizadas

Podemos calcular as coordenadas retangulares a partir destas coordenadas generalizadas

$$x_1 = q_1 - a \sin q_2$$

$$x_2 = q_1 + a \sin q_2$$

e também o inverso

$$q_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$$

$$q_2 = \arcsin \left[\frac{1}{2a}(x_2 - x_1) \right]$$

A equação EL para coordenadas generalizadas

A equação EL pode ser escrita para as coordenadas generalizadas.

Também podem ser incluídas

- forças generalizadas (forças ou momentos), Q_i ;
- forças dissipativas, $F_i = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i}$

D é a **potência dissipada** pelas forças de atrito viscoso e designa-se por **função dissipação de Rayleigh**, dependendo das derivadas dos q_j .

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = F_i + Q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Exemplo: pêndulo matemático (1)

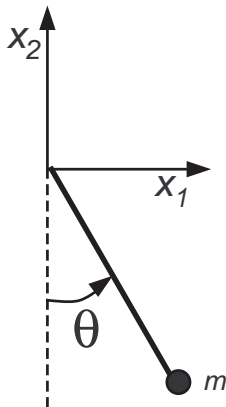
A massa tem 2 graus de liberdade sem restrições.

Há uma restrição: $x_1^2 + x_2^2 = l^2$ em que l é o comprimento do pêndulo.

Número graus de liberdade: $n = 2 - 1 = 1$.

Precisamos de 1 variável generalizada.

Escolhe-se $q = \theta$



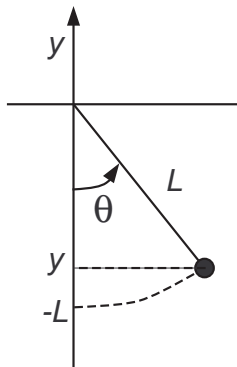
Exemplo: pêndulo matemático - energia potencial (2)

$$\cos \theta = \frac{-y}{l} \quad \text{donde} \quad y = -l \cos \theta$$

Energia potencial

$$U = mgy = -mgl \cos \theta$$

A energia potencial é definida a menos de uma constante aditiva. Neste caso, a energia potencial é 0 para $\frac{\pi}{2}$.



Exemplo: pêndulo matemático (3)

$$T = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 \quad U = -mgl \cos(\theta)$$

$$L = T - U \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

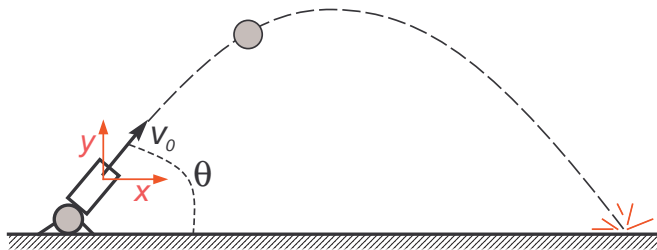
$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl \sin \theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \dot{\theta} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = ml^2 \ddot{\theta}$$

Inserindo na equação EL:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

Exemplo: Canhão(1)



$$L = T - U, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

Tome como coordenadas generalizadas as coordenadas cartesianas.

Canhão (2)

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2$$

$$U = mgy$$

$$L = T - U, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2$$

Canhão (3)

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2$$

Segundo a coordenada x :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$0 - \frac{d}{dt}m\dot{x} = 0 \quad \ddot{x} = 0$$

Segundo a coordenada y :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

$$-mg - \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = 0 \quad \ddot{y} = -g$$

Exemplo: Movimento restringido a um cone (1)

Partícula de massa m sobre a superfície do cone.

Sujeita à força gravitacional.

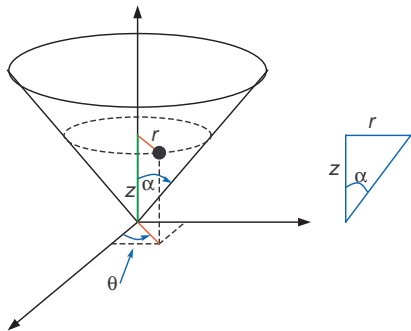
Sem atrito.

Dado que o problema tem simetria cilíndrica, usam-se como coordenadas generalizadas r , θ e z .

$$\tan \alpha = \frac{r}{z}, \quad \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{z}{r}$$

Assim, há a restrição

$$z = r \cot \alpha$$



Devido a esta restrição, apenas se usam 2 coordenadas generalizadas.

Escolhemos r e θ .

Exemplo: Movimento restringido a um cone (2)

$$\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$$

$$1 + \cot^2 \alpha = 1 + \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right)^2 =$$

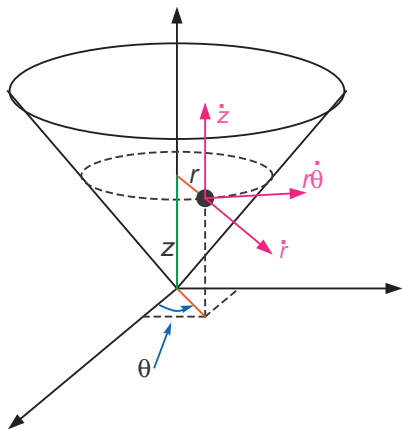
$$= \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \csc^2 \alpha$$

Energia cinética

$$v^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + \dot{r}^2 \cot^2 \alpha$$

$$v^2 = \dot{r}^2 \csc^2 \alpha + r^2 \dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 \csc^2 \alpha + r^2 \dot{\theta}^2 \right)$$



Movimento restringido a um cone (3)

Energia Potencial

$$U = mgz = mgr \cot \alpha$$

Função Lagrangiana

$$L = T - U = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 \csc^2 \alpha + r^2 \dot{\theta}^2 \right) - mgr \cot \alpha$$

L não depende explicitamente de θ pelo que $\partial L / \partial \theta = 0$ e a equação de Euler-Lagrange para a coordenada θ é

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0 \quad \text{ou seja} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta} = \text{constante}$$

que exprime a conservação do momento angular.

A constante obtém-se a partir das condições iniciais:

$$c' = mr^2(0)\omega(0), \quad \text{em que} \quad \omega(t) = \dot{\theta}(t)$$

Movimento restringido a um cone (4)

Equação de Euler-Lagrange para r :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \sin^2 \alpha + g \sin \alpha \cos \alpha = 0.$$

Como

$$mr^2\dot{\theta} = mr^2(0)\omega(0) \quad \text{vem} \quad \dot{\theta} = \frac{c}{r^2}$$

sendo pois

$$\ddot{r} = \frac{c^2}{r^3} \sin^2 \alpha - g \sin \alpha \cos \alpha$$

Movimento restringido a um cone (5)

$$\dot{\theta} = \frac{c}{r^2} \quad c = r^2(0)\omega(0)$$

$$\ddot{r} = \frac{c^2}{r^3} \sin^2 \alpha - g \sin \alpha \cos \alpha$$

Definição das variáveis de estado

$$x_1 = \theta, \quad x_2 = r, \quad x_3 = \dot{r}$$

Modelo de estado (não linear)

$$\dot{x}_1 = \frac{c}{x_2^2}$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = \frac{c^2}{x_2^3} \sin^2 \alpha - g \sin \alpha \cos \alpha$$

Movimento restringido a um cone (6)

Simulação com

$$m = 0,1\text{kg} \quad \omega(0) = 1\text{rad/s}$$

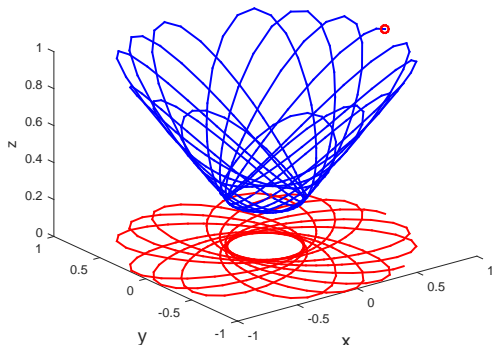
$$\alpha = \frac{\pi}{4}\text{rad} \quad g = 9,8\text{m/s}^2$$

Condições iniciais

$$x_1(0) = 0\text{rad}$$

$$x_2(0) = 1\text{m}$$

$$x_3(0) = 0\text{m/s}$$



A curva a vermelho representa a projeção no plano $z = 0$.

Exemplo: atrito viscoso (1)

Neste exemplo inclui-se dissipação de energia por forças de atrito viscoso.

Há dois graus de liberdade, q_1 e q_2 .

Energia cinética:

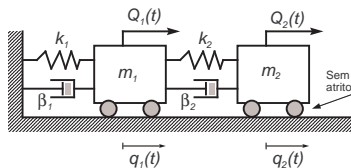
$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{q}_2^2$$

Energia potencial (associada à deformação das molas):

$$U = \frac{1}{2}k_1q_1^2 + \frac{1}{2}k_2(q_1 - q_2)^2$$

Função dissipação de Rayleigh

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}\beta_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}\beta_2(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2$$



Exemplo: atrito viscoso (2)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = F_1 + Q_1$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = F_2 + Q_2$$

$$L = T - U = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_2^2 - \frac{1}{2} k_1 q_1^2 - \frac{1}{2} k_2 (q_2 - q_1)^2$$

$$F_1 = -\beta_1 \dot{q}_1 - \beta_2 (\dot{q}_1 - \dot{q}_2)$$

$$F_2 = -\beta_2 (\dot{q}_2 - \dot{q}_1)$$

Exemplo: atrito viscoso (3)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = F_1 + Q_1$$

$$L = T - U = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_2^2 - \frac{1}{2} k_1 q_1^2 - \frac{1}{2} k_2 (q_1 - q_2)^2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) = \frac{d}{dt} m_1 \dot{q}_1 = m_1 \ddot{q}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = -k_1 q_1 + k_2 (q_2 - q_1)$$

Resulta na equação para a coordenada q_1 :

$$m_1 \ddot{q}_1 + k_1 q_1 + k_2 (q_1 - q_2) = -\beta_1 \dot{q}_1 - \beta_2 (\dot{q}_1 - \dot{q}_2) + Q_1$$

Exemplo: atrito viscoso (4)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = F_2 + Q_2$$

$$L = T - U = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_2^2 - \frac{1}{2} k_1 q_1^2 - \frac{1}{2} k_2 (q_1 - q_2)^2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) = \frac{d}{dt} m_2 \dot{q}_2 = m_2 \ddot{q}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = k_2 (q_1 - q_2)$$

Resulta na equação para a coordenada q_2 :

$$m_2 \ddot{q}_2 + k_2 (q_2 - q_1) = -\beta_2 (\dot{q}_2 - \dot{q}_1) + Q_2$$

Exemplo: atrito viscoso (5)

Equações do modelo do sistema

$$m_1 \ddot{q}_1 + k_1 q_1 + k_2(q_1 - q_2) = -\beta_1 \dot{q}_1 - \beta_2(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) + Q_1$$

$$m_2 \ddot{q}_2 + k_2(q_2 - q_1) = -\beta_2(\dot{q}_2 - \dot{q}_1) + Q_2$$

Podem ser escritas na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 + \beta_2 & -\beta_2 \\ -\beta_2 & \beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

Sistemas eletromecânicos (1)

Equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Como $L = T(q, \dot{q}) - U(q)$ a equação de Euler-Lagrange pode escrever-se

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

O conceito de função lagrangiana e os argumentos que levam à equação de EL podem ser aplicados aos sistemas elétricos (a função lagrangiana é definida como a diferença entre as energia magnética e elétrica. Definindo adequadamente as funções de energia e a força generalizada, pode usar-se uma **abordagem unificada** para sistemas eletromecânicos.

Sistemas eletromecânicos (2)

Abordagem: definir para os sistemas elétricos análogos das variáveis generalizadas e exprimir nelas as energias cinética e potencial e a potência de dissipação, e aplicar a equação de Euler-Lagrange.

A função lagrangiana é construída com termos dos dois domínios (mecânico e elétrico).

Sistemas eletromecânicos (3)

Os acetatos seguintes estão baseados em

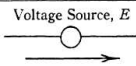
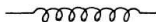


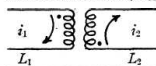
G. W. Ogar e J. J. D'Azzo. A unified procedure for deriving the differential equations of electrical and mechanical systems, *IRE Trans. on Education*, vol. E-5, nº 1, pp.18-26, March 1962.

A dedução das equações de Maxwell para a propagação das ondas eletromagnéticas é apresentada (numa linguagem nem sempre fácil) em M. Planck, *Eight Lectures on Theoretical Physics*, Dover reprint, 1998 (edição original 1915, tendo as lições sido dadas em 1909), Seventh Lecture, 97-111.

O tema da abordagem da eletrodinâmica com base no Princípio de Hamilton é também tratado em K. Simonyi, *Foundations of Electrical Engineering*, Pergamon Press 1963, pp. 813- 835. A motivação, apenas esboçada, é a abordagem da eletrodinâmica quântica, desenvolvida por Richard Feynmann e que lhe valeu o prémio Nobel.

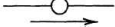

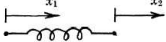
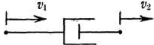
Sistemas eletromecânicos (4)

TABLE I
IDENTIFICATION OF ENERGY FUNCTIONS FOR ELECTRIC CIRCUITS BASED ON THE LOOP OR MESH ANALYSIS

Definitions	Element and Symbol	Kinetic Energy T	Potential Energy V	Dissipation Function D	Forcing Function Q
q = charge (position coordinate) $\frac{dq}{dt} = \dot{q}$ = current E = voltage	Voltage Source, E 				E
	Inductance, L 	$\frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}L\dot{q}^2$			
	Capacitance, C 		$\frac{\left[\int idt\right]^2}{2C} = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C}$		
	Resistance, R 			$\frac{1}{2}Ri^2 = \frac{1}{2}R\dot{q}^2$	
	Mutual Inductance, L_M 	$\pm L_M i_1 i_2$ $= \pm L_M \dot{q}_1 \dot{q}_2$	Use the + sign if both currents enter (or both leave) the dot ends of the coils. Otherwise use the - sign.		

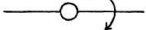

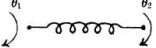

Sistemas eletromecânicos (5)

TABLE II
IDENTIFICATION OF THE ENERGY FUNCTIONS FOR TRANSLATIONAL MECHANICAL ELEMENTS

Definitions	Element and Symbol	Kinetic Energy T	Potential Energy V	Dissipation Factor D	Forcing Function Q
x = displacement $v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$ = velocity F = force	Force, F 				F
	Mass, M 	$\frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}M\dot{x}^2$			
	Elastance, K 		$\frac{K}{2} \left[\int (v_1 - v_2) dt \right]^2$ $= \frac{1}{2}K(x_1 - x_2)^2$		
	Viscous Damping, B 			$\frac{1}{2}B(v_1 - v_2)^2$ $= \frac{1}{2}K(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2$	




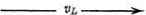
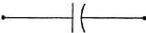
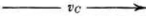

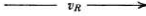
Sistemas eletromecânicos (6)

TABLE III
IDENTIFICATION OF THE ENERGY FUNCTIONS FOR ROTATIONAL MECHANICAL ELEMENTS

Definitions	Element and Symbol	Kinetic Energy T	Potential Energy V	Dissipation Factor D	Forcing Function Q
θ = angular displacement	Torque, τ 				τ
$\omega = \frac{d\theta}{dt}$ = angular velocity τ = torque	Inertia, J ω 	$\frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$			
	Elastance, K θ_1  θ_2		$\frac{1}{2} K (\theta_1 - \theta_2)^2$		
	Viscous Damping, B ω_1  ω_2			$\frac{1}{2} B (\omega_1 - \omega_2)^2$ $= \frac{1}{2} B (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)^2$	

Sistemas eletromecânicos (7)

TABLE V
IDENTIFICATION OF THE ENERGY FUNCTIONS FOR ELECTRIC CIRCUITS BASED ON THE NODAL ANALYSIS

Definitions	Element and Symbol	Kinetic Energy T	Potential Energy V	Dissipation Function D	Forcing Function Q
$v =$ voltage drop $\int v dt = \phi$ is the position coordinate. $v = \frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi}$ is the velocity coordinate.	Current Source, I  				I
	Inductance, L  		$\frac{1}{2L} \left[\int v dt \right]^2$ $= \frac{1}{2L} \phi^2$		
	Capacitance, C  	$\frac{1}{2} C v^2 = \frac{1}{2} C \dot{\phi}^2$			
	Conductance $G = 1/R$  			$\frac{1}{2} G v^2$	

Exemplo: altifalante (1)

O altifalante converte a energia elétrica em energia mecânica de movimento (do cone).

O cone, de massa M , está suspenso por molas e é amortecido por fricção.

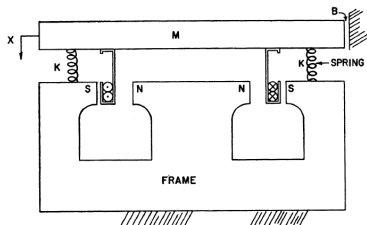
Bobina: ligada rigidamente ao cone.

Indutância L e resistência R . Mergulhada num campo magnético permanente.

Tensão $v_0(t)$ aplicada aos terminais do circuito da bobina.

Variáveis generalizadas: $q_1 = x$, $q_2 = q$;
queremos equações em termos de x e i .

q é uma carga equivalente tal que $i = \frac{dq}{dt}$



$$T = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + K_1xi$$

$$U = \frac{1}{2}Kx^2$$

$$D = \frac{1}{2}B\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Ri^2$$

Exemplo: altifalante (2)

$$T = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + K_1xi$$

$$U = \frac{1}{2}Kx^2 \quad D = \frac{1}{2}B\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Ri^2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = 0$$

$$M\ddot{x} - K_1i + B\dot{x} + Kx = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{i}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{i}} = v_o(t)$$

$$L \frac{di}{dt} + K_1 \frac{dx}{dt} + Ri = v_o(t)$$