Resolução PROBLEMA NO. 4
TESTE01 TIPO, V2, 2020

(1.1)

$$\frac{dp}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{dt} = -v|v| - v + F$$

Sejam $x_1 = p$, $x_2 = v$

$$\Rightarrow \quad \dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 - x_2|x_2| + u$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} +x_2 \\ -x_2 - x_2|x_2| + u \end{pmatrix}}_{F(x,u)} \; ; \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Pontos de equilíbrio:

$$x_{2_0} = 0 \, ; \quad u_0 = 0$$

Linearização em torno do equilíbrio

$$\delta \dot{x} = \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_0 \delta x + \left.\frac{\partial F}{\partial u}\right|_0 \delta u$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \delta \dot{x}_1 &= \delta x_2 \\ \delta \dot{x}_2 &= -\delta x_2 + \delta u \end{aligned}}$$

(note que $\left.\frac{\partial}{\partial x_2} x_2|x_2|\right|_{x=0} = 0$

No que se segue, utilizar (por simplicidade de escrita x_1 e x_2 em vez de δx_1 e δx_2, bem como u em vez de δu)

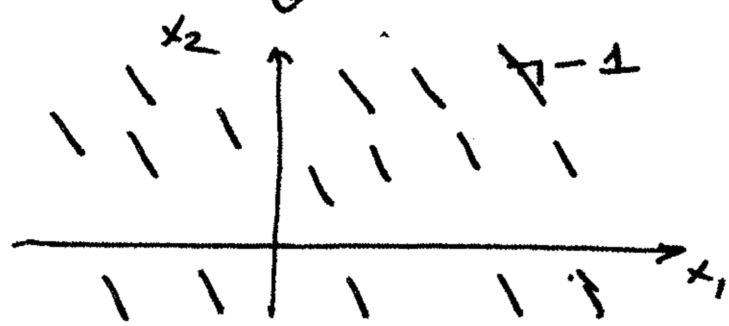
$$\Rightarrow \boxed{\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = -x_2 + u}$$

4.2 $\overset{u=0}{\Rightarrow} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2; \quad \dfrac{dx_2}{dt} = -x_2$

$$\Rightarrow \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{x_2}{x_2} = -1$$

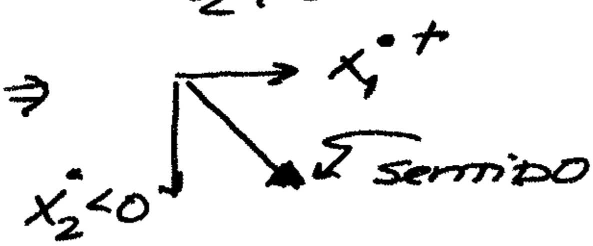
$\Rightarrow$ em qualquer ponto do plano, as trajectórias têm uma tangente local com declive igual a -1

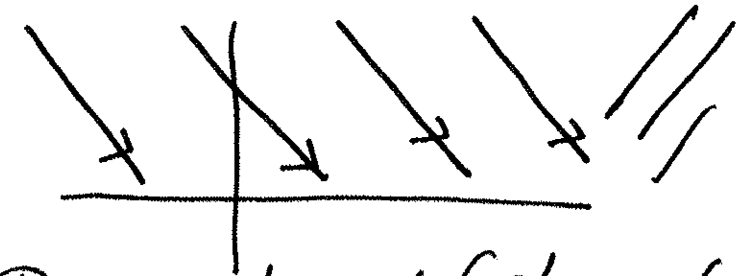
$\Downarrow$



Qual o sentido das trajectórias?
Por exemplo, na região $x_2 > 0$

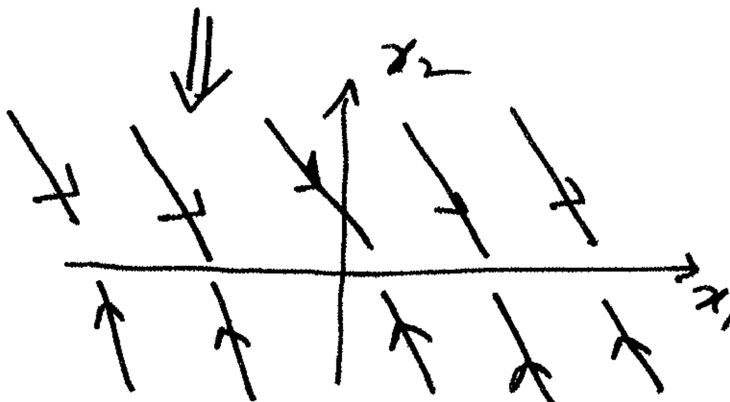
$\Rightarrow \dot{x}_1 = x_2 > 0$
$\dot{x}_2 = -x_2 < 0$ $\Rightarrow$



$\Rightarrow$  PLANO $x_2 > 0$

Por simetria, é fácil verificar o que se passa no plano $x_2 < 0$

$\Downarrow$



Genericamente, qualquer trajectória satisfaz $\lim_{t\to+\infty} x_1(t) \neq 0$!

(4.3) $u = -k_1 x_1 - k_2 x_2$

$k_1 = 10;\ k_2 = 10$

Note que

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B} u$$

$$u = -\underbrace{[10 \quad 10]}_{K} x \ ;\ u = -Kx$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \dot{x} = Ax + Bu \\ u = -Kx \end{array} \Rightarrow \boxed{\dot{x} = (A - BK)x}$$

SISTEMA EM MALHA FECHADA

Nova dinâmica em malha fechada

$$\dot{x} = \underbrace{(A-BK)}_{A_{CL}}x$$

Verificar que os valores próprios de A_{CL} têm parte real negativa

$$A_{CL} = (A-BK) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}(k_1 \ \ k_2)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -1-k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -11 \end{pmatrix}$$

Cálculo de valores próprios:

$$\det(\lambda I - A_{CL}) = \det\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 10 & \lambda+11 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda^2 + 11\lambda + 10 = 0$$

Raízes: $\lambda_1 = -1 \text{ rad s}^{-1}$

$\lambda_2 = -10 \text{ rad s}^{-1}$

$\Rightarrow$ ESTABILIDADE ASSIMPTÓTICA

(4.4) — $\bar{\eta}$ resolvido (ver resolução do outro teste-tipo)

(4.5) —

$$u = +k_1(r - x_1) - k_2 x_2$$

Recorde que

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_2 + u$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -(1+k_2) \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ k_1 \end{pmatrix} r$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -11 \end{pmatrix}}_{A_{CL}} x + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}}_{B_{CL}} r$$

Seja $y = x_1$

$$\Rightarrow \quad y = \underbrace{(1 \quad 0)}_{C_{CL}} x$$

Cálculo da F^e^ TRANSFERÊNCIA

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{X_1(s)}{R(s)}$$

$$= C_{CL}(sI - A_{CL})^{-1} B_{CL}$$

Note que

$$(sI - A_{CL}) = \begin{pmatrix} s & -1 \\ 10 & s+11 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (sI - A_{CL})^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} s+1 & +1 \\ -10 & s \end{pmatrix}}{s^2+11s+10}$$

$$\Rightarrow C_{CL}(sI - A_{CL})^{-1}B_{CL} = \frac{10}{s^2+11s+10}$$

Polos: raízes de $s^2+11s+10$

$=$ valores próprios de A_{CL}

Ganho estático $=1$

$\Rightarrow$ erro estático de posição $=0$!