TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral I

2ºteste - MEMec, LENO - versão B

6 de janeiro de 2020 - 9 horas

I (10 val.)

1. Determine o valor dos integrais:

$$\text{i)} \quad \int_0^1 x^3 e^{-x^2}\, dx \;, \qquad\qquad \text{ii)} \quad \int_0^1 \frac{2x+3}{(x+1)^2(x+2)}\, dx$$

2. Designando por A a região limitada pelas linhas de equação

$$y = -\operatorname{arctg} x, \qquad x = 1 \quad \text{e} \quad y = \frac{\pi}{4}\,,$$

esboce graficamente a região A e calcule a área de A.

3. Seja a função

$$F(x) = \int_0^{x/2} \frac{1}{2\sqrt{t+3}+t+5} dt\;, \qquad x \in]-1, +\infty[\,.$$

i) Determine, usando a mudança de variável $\sqrt{t+3} = u$, o valor de F em $x = 2$.

ii) Escreva o polinómio de Taylor do 2º grau em potências de $x-2$ associado à função F.

II (10 val.)

1. Analise a natureza de cada uma das séries seguintes e indique a soma de uma delas

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n} \qquad , \qquad \text{ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)!} \qquad , \qquad \text{iii)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+2)^{1/4}}{n^3(n+1)^{1/2}}\;.$$

2. Considere a série de potências que tem por soma a função $\cos x$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n}\,.$$

i) Indique, justificando, o domínio de convergência da série indicada.

ii) Escreva a série de potências de x associado à função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \int_1^{e^{x^2}} \frac{\cos(\ln t)}{t} dt\;, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

3. Seja a função $h :]-1, 1[\to \mathbb{R}$,

$$h(x) = \frac{1}{x-2} + \ln|1+x|$$

i) Determine o desenvolvimento em série de Taylor em potências de x da função derivada de h indicando o intervalo de convergência dessa série.

ii) Sendo para $x \in]-1, 1[$,

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt$$

Mostre que a série de Taylor de $L :]-1, 1[\to \mathbb{R}$, $L(x) = \ln(1+x)$ converge para a função L.
Sugestão: Analise separadamente $x \in]0, 1[$ e $x \in]-1, 0[$