Prova oral de Álgebra Linear

Professor: Paulo Pinto

Mestrado Integrado em Engenharia Biológica

Instituto Superior Técnico

# Álgebra Linear aplicada à Genética

Trabalho realizado por:

Mafalda Vicente, Nº95889

Janeiro 2019

## Introdução

A hereditariedade conforma o conjunto de processos biológicos que assegura a transmissão das características dos progenitores para os descendentes. Cada indivíduo possui um par de genes (alelos) que expressam uma determinada característica. Cada um desses alelos provém aleatóriamente de cada um dos progenitores. Por norma uma característica possui sempre um alelo dominante (que designaremos por A) e um alelo recessivo (que designaremos por a). Posto isto, face a um genótipo homozigótico (AA ou aa), o indivíduo expressará sempre a característica codificada pelos únicos alelos que possui (A ou a). Face a um genótipo heterozigótico (Aa), o indivíduo expressará a caraterística determinada pelo alelo dominante (A). Isto é aquilo a que se chama hereditariedade autossómica.

Por outro lado temos também a hereditariedade ligada ao sexo. No caso da hereditariedade ligada ao cromossoma X, o homem possui apenas um gene (A ou a) e expressará sempre essa característica, ao passo que a mulher possui os dois genes (AA, Aa ou aa) e neste caso funcionará como a hereditarideade autossómica.

Num primeiro exemplo iremos explorar a distribuição de genótipos numa população de plantas ao serem cruzadas com plantas sempre do mesmo genótipo e num segundo um exemplo mais concreto, relativo à hereditariedade ligada ao sexo. Para isso iremos recorrer aos conceitos de matriz diagonalizável, valores e vetores próprios disponibilizados pela disciplina de Álgebra Linear, que serão muito úteis nesta área, como poderemos posteriormente analisar.

## Caso 1: Distribuição de genótipos numa população de plantas

Para começar, vamos analisar as probabilidades que cada um dos possíveis genótipos da descendência tem de ocorrer com base nos genótipos dos progenitores:

| | A | A |
|---|---|---|
| A | AA | AA |
| A | AA | AA |

| | A | A |
|---|---|---|
| A | AA | AA |
| a | Aa | Aa |

| | A | A |
|---|---|---|
| a | Aa | Aa |
| a | Aa | Aa |

| | A | a |
|---|---|---|
| A | AA | Aa |
| a | Aa | AA |

| | A | a |
|---|---|---|
| a | Aa | aa |
| a | Aa | aa |

| | a | a |
|---|---|---|
| a | aa | aa |
| a | aa | aa |

Tabela 1

Posto isto, em termos de probabilidade, é possível organizar os dados da seguinte maneira:

| Genótipo da descendência | Genótipos dos pais | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | AA x AA | AA x Aa | AA x aa | Aa x Aa | Aa x aa | aa x aa |
| AA | 1 | $^1/_2$ | 0 | $^1/_4$ | 0 | 0 |
| Aa | 0 | $^1/_2$ | 1 | $^1/_2$ | $^1/_2$ | 0 |
| aa | 0 | 0 | 0 | $^1/_4$ | $^1/_2$ | 1 |

Tabela 2

Seja:

- $a_n$ – proporção de plantas de genótipo AA na n-ésima geração
- $b_n$ – proporção de plantas de genótipo Aa na n-ésima geração
- $c_n$ – proporção de plantas de genótipo aa na n-ésima geração

Note-se que para qualquer caso $a_n + b_n + c_n = 1$

### <u>Caso 1.1: Cruzamento sempre com indivúduos de genótipo AA</u>

Com base nos dados da tabela 2, é fácil chegar à conclusão que:

- $a_n = 1\, a_{n-1} + {}^1/_2\, b_{n-1} + 0\, c_{n-1}$
- $b_n = 0\, a_{n-1} + {}^1/_2\, b_{n-1} + 1\, c_{n-1}$
- $c_n = 0\, a_{n-1} + 0\, b_{n-1} + 0\, c_{n-1}$

E podemos escrever este sistema linear sob a forma de uma equação matricial:

$$\begin{bmatrix} a\,n \\ b\,n \\ c\,n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a\,n-1 \\ b\,n-1 \\ c\,n-1 \end{bmatrix}$$

$$X^{(n)} = A \;.\; X^{(n-1)}$$

Note-se que: $X^{(n)} = A \,.\, X^{(n-1)} = A\,(A \,.\, X^{(n-2)}) = A^2 \,.\, X^{(n-2)} = \ldots = A^n \,.\, X^{(0)}$

Portanto se conseguirmos arranjar uma expessão para $A^n$ conseguimos facilmente encontar uma expessão para $X^n$ e assim seremos capazes de retirar conclusões acerca dos genótipos da população com o passar do tempo.

Começemos por encontar uma matiz D diagonal e uma matriz P invertível tal que: $A = PDP^{-1}$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1/2 \\ 0 & 1/2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\,(1-\lambda)(1/2 - \lambda)$$

Valores próprios de A: $\lambda_1 = 0$ , $\lambda_2=1$, $\lambda_3 = 1/2$

Vetores próprios associados a cada valor próprio:

• $E_{\lambda 1} = \mathcal{N}(A - 0I) = \{(z, -2z, z) \in \mathbb{R}^3 , z \in \mathbb{R}\}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$z$ é livre

$1/2\, y + z = 0 \leftrightarrow y = -2z$

$x + 1/2\, y = 0 \leftrightarrow x = z$

(1, -2, 1) é um dos vetores associado ao espaço próprio de $\lambda_1 = 0$

- $E_{\lambda 2}$ = $\mathcal{N}$(A – 1I) = {($x$, 0, 0) $\epsilon$ $\mathbb{R}^3$ , $z$ $\epsilon$ $\mathbb{R}$ }

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} z \text{ é livre} \\ y = 0 \\ x = 0 \end{matrix}$$

(1, 0, 0) é um dos vetores associado ao espaço próprio de $\lambda_2 = 1$

- $E_{\lambda 3}$ = $\mathcal{N}$(A – $^1/_2$I) = {(-$y$, $y$, 0) $\epsilon$ $\mathbb{R}^3$ , $z$ $\epsilon$ $\mathbb{R}$ }

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} y \text{ é livre} \\ x = -y \\ z = 0 \end{matrix}$$

(-1, 1, 0) é um dos vetores associado ao espaço próprio de $\lambda_3 = {}^1/_2$

Assim sendo:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Falta-nos apenas calcular $P^{-1}$. Utilizando o método de eliminação de Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$X^{(n)} = A^n \cdot X^{(0)} = PD^nP^{-1} \cdot X^{(0)} =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \left(1/2\right)^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\left(1/2\right)^n \\ 0 & 0 & \left(1/2\right)^n \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1-\left(1/2\right)^n & 1-\left(1/2\right)^n \\ 0 & \left(1/2\right)^n & \left(1/2\right)^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a0 + b0 + c0 - \left(1/2\right)^n b0 - \left(1/2\right)^n c0 \\ b0 - \left(1/2\right)^n + c0 - \left(1/2\right)^{n-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Relembrando que $a_0 + b_0 + c_0 = 1$:

$a_n = 1 - (1/2)^n b_0 - (1/2)^n c_0 \longrightarrow 1$

$b_n = (1/2)^n b_0 + (1/2)^n c_0 \longrightarrow 0$

$c_n = 0$

Isto significa ao longo do tempo, do cruzamento de uma população com indivíduos de genótipo homozigótico dominante resultará uma população com esse mesmo genótipo (AA).

Será fácil de perceber que do cruzamento de uma população com indivíduos de genótipo homozigótico recessivo resultará também uma população com esse mesmo genótipo (aa), já que:

- $a_n = 0\, a_{n-1} + 0\, b_{n-1} + 0\, c_{n-1}$
- $b_n = 1\, a_{n-1} + 1/2\, b_{n-1} + 0\, c_{n-1}$
- $c_n = 0\, a_{n-1} + 1/2\, b_{n-1} + 1\, c_{n-1}$

E portanto os cálculos serão muito semelhantes.

Caso 1.2: Cruzamento sempre com indivúduos de genótipo Aa

Tendo por base as probabilidades da tabela 2 conclui-se que:

- $a_n = {}^1/_2\, a_{n-1} + {}^1/_4\, b_{n-1} + 0\, c_{n-1}$
- $b_n = {}^1/_2\, a_{n-1} + {}^1/_2\, b_{n-1} + {}^1/_2\, c_{n-1}$
- $c_n = 0\, a_{n-1} + {}^1/_4\, b_{n-1} + {}^1/_2\, c_{n-1}$

E podemos escrever este sistema linear sob a forma de uma equação matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a\,n \\ b\,n \\ c\,n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1/_2 & {}^1/_4 & 0 \\ {}^1/_2 & {}^1/_2 & {}^1/_2 \\ 0 & {}^1/_4 & {}^1/_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a\,n-1 \\ b\,n-1 \\ c\,n-1 \end{bmatrix}}$$

$$X^{(n)} = B \;.\; X^{(n-1)}$$

Vamos de novo arranjar uma matriz D diagonal e P invertível tal que $B=PDP^{-1}$:

$$\det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} {}^1/_2 - \lambda & {}^1/_4 & 0 \\ {}^1/_2 & {}^1/_2 - \lambda & {}^1/_2 \\ 0 & {}^1/_4 & {}^1/_2 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= {}^1/_2 - \lambda \begin{vmatrix} {}^1/_2 - \lambda & {}^1/_2 \\ {}^1/_4 & {}^1/_2 - \lambda \end{vmatrix} - {}^1/_4 \begin{vmatrix} {}^1/_2 & {}^1/_2 \\ 0 & {}^1/_2 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= ({}^1/_2 - \lambda)\,(({}^1/_2 - \lambda)^2 - {}^1/_8) - {}^1/_4\,({}^1/_2\,({}^1/_2 - \lambda)) = \lambda\,({}^1/_2 - \lambda)(\lambda - 1)$$

Valores próprios de B: $\lambda_1 = 0$ , $\lambda_2 = {}^1/_2$, $\lambda_3 = 1$

• $E_{\lambda 1} = \mathcal{N}(B - 0I) = \{(z, -2z, z) \in \mathbb{R}^3 , z \in \mathbb{R}\}$

$$\begin{bmatrix} {}^1/_2 & {}^1/_4 & 0 \\ {}^1/_2 & {}^1/_2 & {}^1/_2 \\ 0 & {}^1/_4 & {}^1/_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} {}^1/_2 & {}^1/_4 & 0 \\ 0 & {}^1/_4 & {}^1/_2 \\ 0 & {}^1/_4 & {}^1/_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} {}^1/_2 & {}^1/_4 & 0 \\ 0 & {}^1/_4 & {}^1/_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$z$ é livre

${}^1/_4\, y + {}^1/_2\, z = 0 \leftrightarrow y = -2z$

${}^1/_2\, x + {}^1/_4\, y = 0 \leftrightarrow x = z$

(1, -2, 1) é um dos vetores associado ao espço próprio de $\lambda_1 = 0$

- $E_{\lambda 2} = \mathcal{N}(B - {}^1/_2 I) = \{(-z, 0, z) \in \mathbb{R}^3 , z \in \mathbb{R}\}$

$$\begin{bmatrix} 0 & {}^1/_4 & 0 \\ {}^1/_2 & 0 & {}^1/_2 \\ 0 & {}^1/_4 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & {}^1/_4 & 0 \\ {}^1/_2 & 0 & {}^1/_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$z$ é livre

${}^1/_4\, y = 0 \leftrightarrow y = 0$

${}^1/_2\, x + {}^1/_2\, z = 0 \leftrightarrow x = -z$

(-1, 0, 1) é um dos vetores associado ao espaço próprio de $\lambda_2 = {}^1/_2$

- $E_{\lambda 3} = \mathcal{N}(B - 1I) = \{(z, 2z, z) \in \mathbb{R}^3 , z \in \mathbb{R}\}$

$$\begin{bmatrix} -{}^1/_2 & {}^1/_4 & 0 \\ {}^1/_2 & -{}^1/_2 & {}^1/_2 \\ 0 & {}^1/_4 & -{}^1/_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -{}^1/_2 & {}^1/_4 & 0 \\ 0 & -{}^1/_4 & {}^1/_2 \\ 0 & {}^1/_4 & -{}^1/_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -{}^1/_2 & {}^1/_4 & 0 \\ 0 & -{}^1/_4 & {}^1/_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$z$ é livre

$-{}^1/_4\, y + {}^1/_2\, z = 0 \leftrightarrow y = 2z$

$-{}^1/_2\, x + {}^1/_4\, y = 0 \leftrightarrow x = z$

(1, 2, 1) é um dos vetores associado ao espaço próprio de $\lambda_3 = 1$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^1/_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & {}^3/_4 & -{}^1/_4 & -{}^1/_4 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & {}^1/_4 & -{}^1/_4 & {}^1/_4 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & {}^1/_4 & -{}^1/_4 & {}^1/_4 \\ 0 & 1 & 0 & -{}^1/_2 & 0 & {}^1/_2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} {}^1/_4 & -{}^1/_4 & {}^1/_4 \\ -{}^1/_2 & 0 & {}^1/_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$X^{(n)} = B^n \cdot X^{(0)} = PD^nP^{-1} \cdot X^{(0)} =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1/2\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 & 1/4 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\left(1/2\right)^n & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & \left(1/2\right)^n & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 & 1/4 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \left(1/2\right)^{n+1} + 1/4 & 1/4 & -\left(1/2\right)^{n+1} + 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -\left(1/2\right)^{n+1} + 1/4 & 1/4 & \left(1/2\right)^{n+1} + 1/4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/4\,(a0 + b0 + c0) + \left(1/2\right)^{n+1} a0 - \left(1/2\right)^{n+1} c0 \\ 1/2\,(a0 + b0 + c0) \\ 1/4\,(a0 + b0 + c0) - \left(1/2\right)^{n+1} a0 + \left(1/2\right)^{n+1} c0 \end{bmatrix}$$

Posto isto conclui-se que:

$a_n = 1/4 \cdot 1 + (1/2)^{n+1} a_0 - (1/2)^{n+1} c_0 \longrightarrow 1/4$

$b_n = 1/2 \cdot 1 = 1/2$

$c_n = 1/4 \cdot 1 - (1/2)^{n+1} a_0 + (1/2)^{n+1} c_0 \longrightarrow 1/4$

O que significa que ao longo do tempo, do cruzamento de uma população com indivíduos de genótipo heterozigótico resultará uma população metade heterozigótica (Aa), um quarto homozigótica dominante (AA) e um quarto homozigótica recessiva (aa).

## Caso 2: Hereditariedade ligada ao sexo

O daltonismo é uma característica hereditária recessiva determinada por um gene no cromossoma X. As mulheres possuem dois destes cromossomas e os homens apenas um, pelo que cada filho do sexo masculino de um casal recebe apenas um cromossoma X da mãe, enquanto cada filha do sexo feminino de um casal recebe um cromossoma X da mãe e um do pai. Assim, numa população masculina (M), a proporção de genes

recessivos na n-ésima geração será igual à proporção de genes recessivos na população feminina (F) da geração anterior, enquanto a proporção de genes recessivos na população feminina na n-ésima geração será dada pela média da proporção de genes recessivos da população masculina e feminina na geração anterior. Com isto podemos escrever um sistema linear:

$M^{(n)} = 0\, M^{(n-1)} + 1\, F^{(n-1)}$

$F^{(n)} = {}^{1}/_{2}\, M^{(n-1)} + {}^{1}/_{2}\, F^{(n-1)}$

Que na forma matricial corresponde a:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M^{(n)} \\ F^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ {}^{1}/_{2} & {}^{1}/_{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M^{(n-1)} \\ F^{(n-1)} \end{bmatrix}}$$

$$X^{(n)} = C \;.\; X^{(n-1)}$$

Iremos de novo encontar D diagonal e P invertível tal que $C=PDP^{-1}$:

$$\det(C - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ {}^{1}/_{2} & {}^{1}/_{2} - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda\,({}^{1}/_{2} - \lambda) - {}^{1}/_{2} = (\lambda - 1)\,({}^{1}/_{2} + \lambda)$$

Valores próprios de C: $\lambda_1 = 1$ , $\lambda_2 = -{}^{1}/_{2}$

- $E_{\lambda 1} = \mathcal{N}(C - 1I) = \{(y,y) \in \mathbb{R}^2 , z \in \mathbb{R}\}$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ {}^{1}/_{2} & -{}^{1}/_{2} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} y \text{ é livre} \\ -x + y = 0 \leftrightarrow x = y \end{matrix}$$

(1, 1) é um dos vetores associado ao espaço próprio de $\lambda_1 = 1$

- $E_{\lambda 2} = \mathcal{N}(C + {}^{1}/_{2}I) = \{(-2y,y) \in \mathbb{R}^2 , z \in \mathbb{R}\}$

$$\begin{bmatrix} {}^{1}/_{2} & 1 \\ {}^{1}/_{2} & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} {}^{1}/_{2} & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} y \text{ é livre} \\ {}^{1}/_{2}\, x + y = 0 \leftrightarrow x = -2y \end{matrix}$$

(-2, 1) é um dos vetores associado ao espaço próprio de $\lambda_2 = {}^{1}/_{2}$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -{}^{1}/_{2} \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & 1/3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 1/3 \end{array}\right]$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$X^{(n)} = C^n \cdot X^{(0)} = PD^nP^{-1} \cdot X^{(0)} =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1/2)^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M^{(0)} \\ F^{(0)} \end{bmatrix} =$$

$$= 1/3 \begin{bmatrix} 1 & (1/2)^{n-1} \\ 1 & (-1/2)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M^{(0)} \\ F^{(0)} \end{bmatrix} = 1/3 \begin{bmatrix} 1-(1/2)^{n-1} & 2+(1/2)^{n-1} \\ 1+(1/2)^{n-1} & 2+(-1/2)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M^{(0)} \\ F^{(0)} \end{bmatrix}$$

$$= 1/3 \begin{bmatrix} M^{(0)} + 2F^{(0)} - (1/2)^{n-1}M^{(0)} + (1/2)^{n-1}F^{(0)} \\ M^{(0)} + 2F^{(0)} - (1/2)^{n-1}M^{(0)} + (1/2)^{n-1}F^{(0)} \end{bmatrix}$$

$$M^{(n)} = \frac{M^{(0)}+2F^{(0)}-(1/2)^{n-1}M^{(0)}+(1/2)^{n-1}F^{(0)}}{3} \longrightarrow \frac{M^{(0)}+2F^{(0)}}{3}$$

$$F^{(n)} = \frac{M^{(0)}+2F^{(0)}-(1/2)^{n-1}M^{(0)}+(1/2)^{n-1}F^{(0)}}{3} \longrightarrow \frac{M^{(0)}+2F^{(0)}}{3}$$

Estes limites levam-nos a concluir que com o passar do tempo, a proporção de genes para uma característica ligada ao cromossoma X recessiva (como é o caso do daltonismo) na popluação masculina e feminina vão tender para o mesmo valor.

## Conclusão

A disciplina de Álgebra Linear permite-nos invertigar a propagação de uma dada caraterística hereditária ao longo de várias gerações permitindo-nos tirar conclusões acerca disso. Essas conclusões podem ter várias aplicações práticas como por exemplo, sobre técnicas de controlo de doenças e pragas em populações de animais e plantas.

Esta é uma das muitas áreas onde Álgebra Linear é uma ferramenta muito útil na resolução de problemas.

## Bibliografia:

- ANTON, Howard; RORRES, Chris. (2014). *Elementary Linear Algebra – Applications Version*. 11ª edição

- Apontamentos das aulas teóricas de Álgebra Linear – Cursos: MEBiol e MEBiom – 1º Semestre 2019/2020