

- Este teste tem três grupos. Responda ao primeiro **no próprio enunciado**.
- **Identifique todas as folhas**, incluindo o enunciado, com o seu número e com o seu primeiro e último nome. Não desagrafe o enunciado.
- O teste decorre sem consulta, excetuando-se a consulta de um **máximo de seis páginas A4** (três folhas, frente e verso) trazidas pelo aluno.
- Não é permitido o uso de **calculadoras programáveis** (em caso de necessidade, o corpo docente reserva-se o direito de fazer reset à memória das calculadoras dos alunos).
- Em caso algum é permitido o uso de calculadoras com qualquer **capacidade gráfica**.
- Responda às questões de escolha múltipla com uma cruz \boxtimes no quadrado \square respetivo. Caso queira emendar uma resposta, risque completamente o quadrado \blacksquare e coloque à esquerda da opção que considera correta o símbolo \boxtimes .
- A cotação de cada pergunta está indicada no início de cada grupo. A cotação total é de 10 valores.
- Há questões cuja resposta depende do seu número de aluno do IST, com cinco dígitos (n_1, n_2, n_3, n_4 e n_5). A sua resposta **tem** de ser dada substituindo o valor da variável em questão, sob pena de ser considerada incorreta.

Número: Nome:

n_1 n_2 n_3 n_4 n_5

Grupo I (6 perguntas, 3 valores)

Cada pergunta tem a cotação de 0,5 valores. Cada resposta errada desconta à cotação deste grupo $-\frac{0,5}{n}$ valores, onde n é o número de respostas possíveis. A cotação mínima do grupo é de 0 valores.

Considere um sistema descrito exatamente pela seguinte função de transferência:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(5 + n_4)s + (5 + n_3 + n_2)}{s^{10-n_1} + n_5s} \quad (1)$$

1. O sistema é
 - de ordem 1
 - de ordem 2
 - de ordem 3
 - de ordem 4
 - de ordem 0
2. O sistema é
 - de tipo 1
 - de tipo 2
 - de tipo 3
 - de tipo 4
 - de tipo 0
3. O sistema tem
 - 1 zeros
 - 2 zeros
 - 3 zeros
 - 4 zeros
 - 0 zeros

4. O sistema é
 - estável
 - marginalmente estável
 - instável
 - nenhuma das anteriores
5. O sistema
 - tem 1 zero no semiplano complexo direito
 - tem 2 zeros no semiplano complexo direito
 - tem 3 zeros no semiplano complexo direito
 - tem 4 zeros no semiplano complexo direito
 - não tem zeros no semiplano complexo direito
6. O sistema é
 - SISO
 - MISO
 - SIMO
 - MIMO
 - nenhuma das anteriores

Grupo II (4 perguntas, 4 valores)

Cada pergunta tem a cotação de 1 valor.

1. Considere novamente a função de transferência (1). Escreva a equação diferencial que relaciona a entrada do sistema $u(t)$ com a saída do sistema $y(t)$. Apresente todos os cálculos com os valores de n_1, n_2, n_3, n_4 e n_5 já substituídos.
2. A resposta a uma rampa unitária de um sistema de primeira ordem sem zeros $G(s) = \frac{b}{s+a}$ é dada por
$$y(t) = (3 + n_2) \left(e^{-(2+n_3)t} - 1 + (2 + n_3)t \right) \quad (2)$$
Ache a e b .

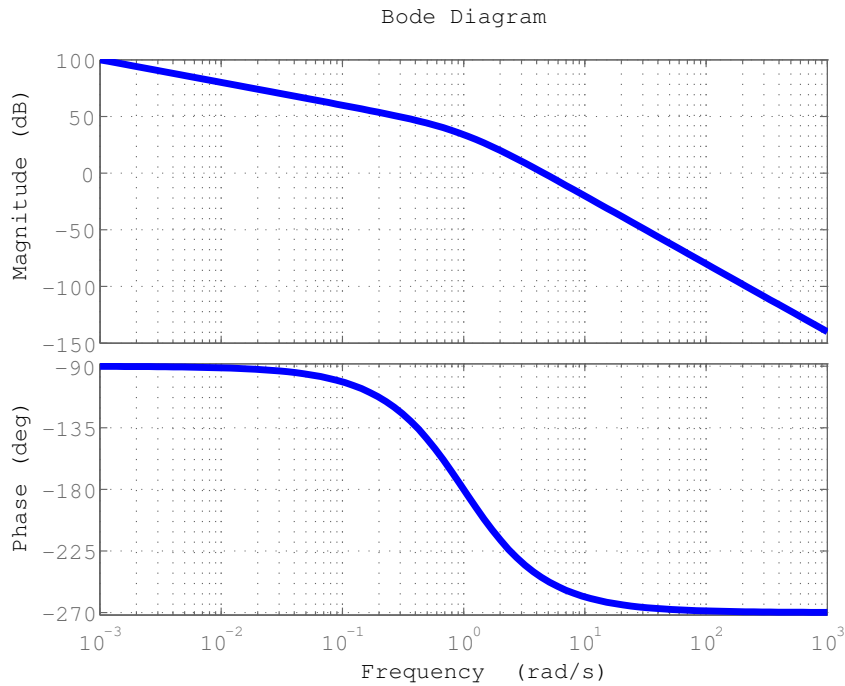


Figura 1: Diagrama de Bode da pergunta II.3.

3. Considere o sistema cuja resposta em frequência é descrita pelo diagrama de Bode da Figura 1. Quando a entrada é dada por

$$u(t) = \sin(\omega t) \quad (3)$$

a amplitude da senoide de saída em estado estacionário é 10^{4-n_5} . Ache a frequência ω , em rad/s, por leitura no gráfico.

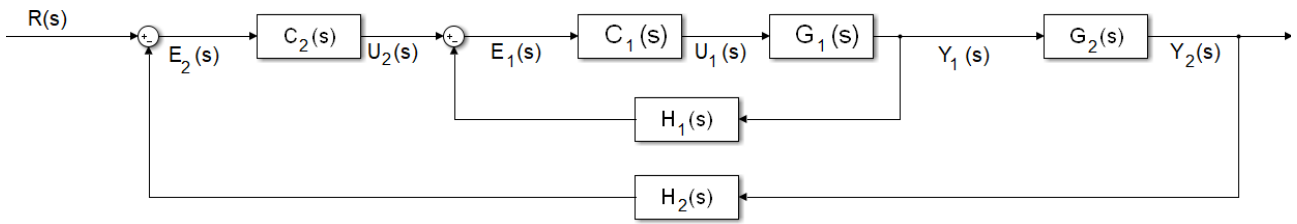
4. Considere o diagrama de blocos da Figura 2. Ache a função de transferência pedida como função de C_1 , C_2 , G_1 , G_2 , H_1 e H_2 , simplificando o resultado.

Grupo III (1 pergunta, 3 valores)

A única pergunta tem a cotação de 3 valores.

Considere o sistema da Figura 3, onde o corpo de capacidade térmica C_T é aquecido pela potência $P(t)$ (dissipada pela resistência) e arrefecido pelo fluxo de calor com potência $q(t)$. Essa potência de arrefecimento $q(t)$ é devida a convecção, sendo o coeficiente de convecção h . O corpo está a uma temperatura $\Delta T(t)$ superior à temperatura exterior, que é constante. Ache a função de transferência $\frac{\Delta T(s)}{P(s)}$, e a função de transferência $\frac{I(s)}{V(s)}$. Sabendo que $P(t) = RI^2(t)$, explique se a relação entre $T(t)$ e $V(t)$ é linear ou não-linear.





n_4	0, 1, 2	3, 4, 5	6, 7, 8, 9
função de transferência pedida	$\frac{Y_1(s)}{U_2(s)}$	$\frac{U_1(s)}{U_2(s)}$	$\frac{E_1(s)}{U_2(s)}$

Figura 2: Diagrama de blocos da pergunta II.4.

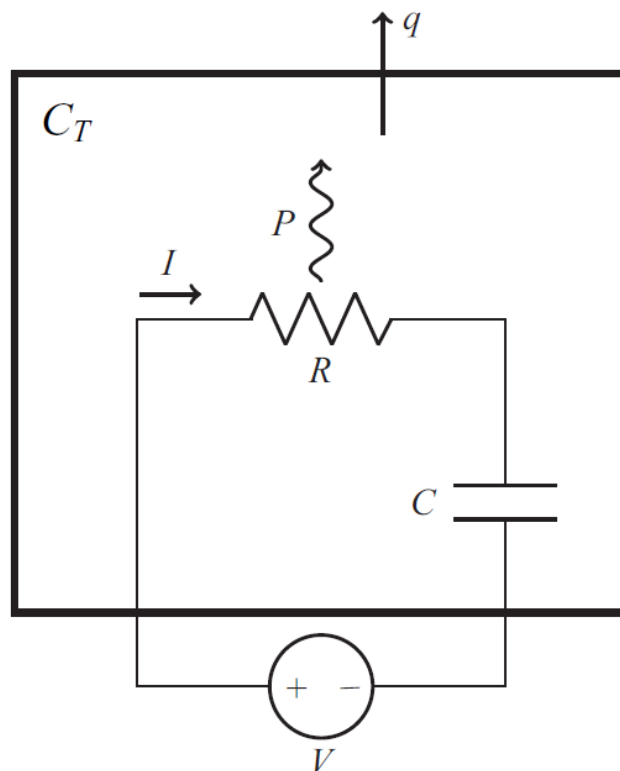


Figura 3: Sistema do grupo III.

- I 1 se $m_1 = 9$ é de ordem 1
- " $m_1 = 8$ " " 2
- " $m_1 = 7$ " " 3
- " $m_1 = 6$ " " 4

- 2 se $m_5 \neq 0$ é de tipo 1
- " $m_5 = 0$ " " " $10 - m_1$ (igual à ordem)

3 um zero

4 $s^{10-m_1} + m_5 s = 0$

se $m_5 = 0$ nem $s^{10-m_1} = 0$; se $m_1 = 9, s = 0$ polo simples: marg. estável

se $m_1 \leq 8, s = 0$ polo múltiplo: instável

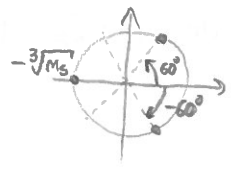
se $m_5 \neq 0$ e $m_1 = 9$ nem $(m_5 + 1)s = 0 \Leftrightarrow s = 0$ polo simples: marg. estável

se $m_5 \neq 0$ e $m_1 \leq 8$ nem $s(s^{9-m_1} + m_5) = 0 \Leftrightarrow s = 0 \vee s^{9-m_1} = -m_5$

se $m_1 = 8$ nem $s = 0 \vee s = -m_5$ logo, marg. estável
 ↑ marg. estável

se $m_1 = 7$ nem $s = 0 \vee s^2 = -m_5$, 3 polos simples marg. estáveis; marg. estável

se $m_1 = 6$ nem $s = 0 \vee s^3 = -m_5$, há 2 polos no SPD: instável



5 $s = -\frac{5+m_3+m_2}{5+m_4}$ fase mínima

6 SISO

II 1 $Y(s) s^{10-m_1} + m_5 Y(s) s = (5+m_4) U(s) s + (5+m_3+m_2) Y(s)$
 $y^{(10-m_1)}(t) + m_5 y'(t) = (5+m_4) u'(t) + (5+m_3+m_2) y(t)$

2 $G(s) = \frac{b}{s+a}$ $U(s) = \frac{1}{s^2}$ $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{b}{s^2(s+a)} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+a} \right] =$
 $= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{A(s^2+as) + B(s+a) + Cs^2}{s^2(s+a)} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s^2(A+C) + s(Aa+B) + Ba}{s^2(s+a)} \right] =$

onde $\begin{cases} A+C=0 \\ Aa+B=0 \\ Ba=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=-A = \frac{b}{a^2} \\ A = -\frac{B}{a} = -\frac{b}{a^2} \\ B = \frac{b}{a} \end{cases} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{-\frac{b}{a^2}}{s} + \frac{b}{a^2} + \frac{\frac{b}{a}}{s+a} \right] =$

$$= -\frac{b}{a^2} + \frac{b}{a} t + \frac{b}{a^2} e^{-at} = \frac{b}{a^2} (-1 + at + e^{-at})$$

$$\text{Se } g(t) = (3+m_2) \left(e^{-(2+m_3)t} - 1 + (2+m_3)t \right)$$

há tabelas que dão esta transformada diretamente, a menos do ganho b .

$$\text{mem } \begin{cases} 2+m_3 = a \\ 3+m_2 = \frac{b}{a^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2+m_3 \\ b = (3+m_2)(2+m_3)^2 \end{cases}$$

3	m_3	ganho	ganho em dB	ω em rad/s
	0	10^4	80	4×10^{-3}
	1	10^3	60	1×10^{-1}
	2	10^2	40	5×10^{-1}
	3	10^1	20	3×10^0
	4	10^0	0	$4,5 \times 10^0$
	5	10^{-1}	-20	6×10^0
	6	10^{-2}	-40	2×10^1
	7	10^{-3}	-60	5×10^1
	8	10^{-4}	-80	1×10^2
	9	10^{-5}	-100	2×10^2

valores lidos no gráfico, porque há alguma tolerância no valor encontrado

$$4 \quad Y_1 = G_1 U_1 \quad U_1 = C_1 E_1 \quad E_1 = U_2 - H_1 Y_1 = U_2 - H_1 G_1 U_1 =$$

$$= U_2 - H_1 G_1 C_1 E_1 \text{ logo } E_1 (1 + H_1 G_1 C_1) = U_2 \Rightarrow \frac{E_1}{U_2} = \frac{1}{1 + H_1 G_1 C_1} \text{ donde}$$

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{U_1}{E_1} \frac{E_1}{U_2} = \frac{C_1}{1 + H_1 G_1 C_1} \quad \text{e} \quad \frac{Y_1}{U_2} = \frac{Y_1}{U_1} \frac{U_1}{U_2} = \frac{G_1 C_1}{1 + H_1 G_1 C_1}$$

$$\text{III impedância dos 2 els. em série } R + \frac{1}{Cs} \text{ logo } \frac{V}{I} = R + \frac{1}{Cs} \Rightarrow \frac{I}{V} = \frac{1}{R + \frac{1}{Cs}} = \frac{Cs}{1 + RCs}$$

$$\left. \begin{array}{l} P - q = C_T \Delta T \\ q = h \Delta T \end{array} \right\} P - h \Delta T = C_T \Delta T \Rightarrow P = \Delta T (C_T + h) \Rightarrow \frac{\Delta T}{P} = \frac{1}{h + C_T s}$$

$P = RI^2$ é não-linear