DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Probabilidades e Estatística

TODOS OS CURSOS

1º semestre – 2017/2018
30/01/2018 – **11:30**

Duração: 90 minutos **1º Teste C**

Justifique convenientemente todas as respostas

Grupo I	10 valores

1. A Marta e o João irão passar férias a Barcelona no mês de julho, sendo 0.43 a probabilidade de viajarem na primeira quinzena desse mês. Caso viajem na primeira (resp. segunda) quinzena de julho, a probabilidade de visitarem o museu Picasso é 0.77 (resp. 0.63). Para essa viagem a Barcelona:

(a) Determine a probabilidade de a Marta e o João visitarem o museu Picasso. (2.5)

- **Quadro de acontecimentos e probabilidades**

Acontecimento	**Probabilidade**
V = {Marta e João viajam na primeira quinzena de julho}	$P(V) = 0.43$
M = {Marta e João visitam o museu Picasso}	$P(M) = ?$
	$P(M \mid V) = 0.77$
	$P(M \mid \overline{V}) = 0.63$

- **Probabilidade pedida**

Invocando a lei da probabilidade total, tem-se

$$\begin{aligned} P(M) &= P(M \mid V) \times P(V) + P(M \mid \overline{V}) \times P(\overline{V}) \\ &= 0.77 \times 0.43 + 0.63 \times (1 - 0.43) \\ &= 0.6902 \end{aligned}$$

(b) Se a Marta e o João visitarem o museu Picasso, calcule a probabilidade de que viajem a Barcelona na primeira quinzena de julho. (2.5)

- **Prob. pedida**

Tirando partido do teorema de Bayes, segue-se

$$\begin{aligned} P(V \mid M) &= \frac{P(M \mid V) \times P(V)}{P(M)} \\ &\overset{(a)}{=} \frac{0.77 \times 0.43}{0.6902} \\ &\simeq 0.479716. \end{aligned}$$

2. Um pequeno fabricante de aparelhos elétricos possui uma carteira de 20 clientes entre os quais 5 possuem informações úteis para melhorar o processo de fabrico dos aparelhos.

(a) Selecionados ao acaso 4 clientes dessa carteira, qual é a probabilidade de pelo menos um deles possuir informações úteis? (2.0)

- **Variável aleatória de interesse**

X = número de clientes com informações úteis, numa amostra de 4 clientes selecionados ao acaso e SEM reposição da carteira com 20 clientes, dos quais 5 possuem informações úteis

- **Distribuição de X**

$X \sim \text{Hipergeométrica}(N, M, n)$
com:
$N = 20$ (total de clientes da carteira);
$M = 5$ (total de clientes da carteira com informações úteis);
$n = 4$ (clientes selecionados ao acaso e SEM reposição).

- **F.p. de X**

$$P(X=x) \overset{form.}{=} \begin{cases} \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}, & x=\max\{0,n-(N-M)\},\ldots,\min\{n,M\} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{\binom{5}{x}\binom{20-5}{4-x}}{\binom{20}{4}}, & x=0,1,2,3,4 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned} P(X\geq 1) &= 1-P(X=0) \\ &= 1-\frac{\binom{5}{0}\binom{20-5}{4-0}}{\binom{20}{4}} \\ &= 1-\frac{\binom{15}{4}}{\binom{20}{4}} \\ &= 1-\frac{\frac{15!}{4!11!}}{\frac{20!}{4!16!}} \\ &= 1-\frac{15!16!}{11!20!} \\ &= 1-\frac{15\times 14\times 13\times 12\times 11! \quad 16!}{11! \quad 20\times 19\times 18\times 17\times 16!} \\ &= 1-\frac{15\times 14\times 13\times 12}{20\times 19\times 18\times 17} \\ &= 1-\frac{91}{323} \\ &= \frac{232}{323} \\ &\simeq 0.718266. \end{aligned}$$

(b) Obtenha o valor esperado e a variância do número de clientes que possuem informações úteis entre os 4 clientes selecionados ao acaso. (1.0)

- **Valor esperado de X**

$$\begin{aligned} E(X) &\overset{form}{=} n\frac{M}{N} \\ &= 4\times\frac{5}{20} \\ &= 1 \end{aligned}$$

- **Variância de X**

$$\begin{aligned} V(X) &\overset{form}{=} n\frac{M}{N}\frac{N-M}{N}\frac{N-n}{N-1} \\ &= 4\times\frac{5}{20}\times\frac{20-5}{20}\times\frac{20-4}{20-1} \\ &= \frac{12}{19}. \end{aligned}$$

(c) Qual é a probabilidade de, entre os 4 clientes selecionados ao acaso, somente o terceiro cliente possuir informações úteis? (2.0)

- **Prob. pedida**

Considere-se que I_i representa o evento "i – ésimo cliente selecionado possui informações úteis", para $i=1,2,3,4$. Então, ao invocar a lei da probabilidade composta e definição de probabilidade de Laplace, temos

$$\begin{aligned} P(\bar{I}_1\cap\bar{I}_2\cap I_3\cap\bar{I}_4) &= P(\bar{I}_1)\times P(\bar{I}_2\mid\bar{I}_1)\times P(I_3\mid\bar{I}_1\cap\bar{I}_2)\times P(\bar{I}_4\mid\bar{I}_1\cap\bar{I}_2\cap I_3) \\ &= \frac{15}{20}\times\frac{14}{19}\times\frac{5}{18}\times\frac{13}{17} \end{aligned}$$

$$P(\bar{I}_1 \cap \bar{I}_2 \cap I_3 \cap \bar{I}_4) = \frac{455}{3876} \simeq 0.117389.$$

Grupo II	10 valores

1. Considere que a variável aleatória X representa a concentração de determinado gás numa mistura e possui função de distribuição

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1-(1-x)^3, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & x > 1, \end{cases}$$

valor esperado $E(X) = \frac{1}{4}$ e variância $V(X) = \frac{3}{80}$.

(a) Calcule $P(X \le 0.8 \mid X > 0.5)$. (1.5)

- **V.a. de interesse, f.d., valor esperado e variância**
  X = concentração de determinado gás numa mistura
  $$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1-(1-x)^3, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & x > 1, \end{cases}$$
  $E(X) = \frac{1}{4}$
  $V(X) = \frac{3}{80}$
- **Prob. pedida**
  $$\begin{aligned} P(X \le 0.8 \mid X > 0.5) &= \frac{P(X \le 0.8 \cap X > 0.5)}{P(X > 0.5)} \\ &= \frac{P(0.5 < X \le 0.8)}{1 - P(X \le 0.5)} \\ &= \frac{F_X(0.8) - F_X(0.5)}{1 - F_X(0.5)} \\ &= \frac{[1-(1-0.8)^3] - [1-(1-0.5)^3]}{1 - [1-(1-0.5)^3]} \\ &= \frac{0.5^3 - 0.2^3}{0.5^3} \\ &= 0.936. \end{aligned}$$

(b) Determine a mediana e a função de densidade de probabilidade de X. (2.0)

- **Mediana de X**
  $$\begin{aligned} me = me(X) \in (0,1) \quad : \quad & F_X(me) = \frac{1}{2} \\ & 1-(1-me)^3 = \frac{1}{2} \\ & (1-me)^3 = 0.5 \\ & me = 1 - 0.5^{1/3} \\ & me = 0.206299. \end{aligned}$$
- **F.d.p. de X**
  $$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{dF_X(x)}{dx} \\ &= \begin{cases} \frac{d[1-(1-x)^3]}{dx} = 3(1-x)^2, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \end{aligned}$$

(c) Sejam $X_1,\ldots,X_{100}$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas a X. Calcule um valor aproximado para a probabilidade de $\bar{X}=\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}X_i$ ser superior a 0.27. (2.5)

- **V.a.**
  X_i = concentração de determinado gás na mistura i, $\quad i=1,\ldots,n$
  $n=100$

- **Distribuição, valor esperado e variância comuns**
  $X_i \overset{i.i.d.}{\sim} X, \quad i=1,\ldots,n$
  $E(X_i)=E(X)=\mu=\frac{1}{4}, \quad i=1,\ldots,n$
  $V(X_i)=V(X)=\sigma^2=\frac{3}{80}, \quad i=1,\ldots,n$

- **V.a. de interesse**
  $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ = concentração média de determinado gás em n misturas

- **Valor esperado e variância de $\bar{X}_n$**
  $E(\bar{X})=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)\overset{X_i\sim X}{=}\frac{1}{n}\times nE(X)=E(X)=\mu$
  $V(\bar{X})=V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)\overset{X_i\ indep.}{=}\frac{1}{n^2}\times\sum_{i=1}^{n}V(X_i)\overset{X_i\sim X}{=}\frac{1}{n^2}\times nV(X)=\frac{V(X)}{n}=\frac{\sigma^2}{n}$

- **Distribuição aproximada de $\bar{X}$**
  Pelo teorema do limite central (TLC) pode escrever-se

$$\frac{\bar{X}-E(\bar{X})}{\sqrt{V(\bar{X})}}=\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\overset{a}{\sim}\text{Normal}(0,1).$$

- **Valor aproximado da probabilidade pedida**

$$\begin{aligned}
P(\bar{X}>0.27) &= 1-P(\bar{X}\leq 0.27)\\
&= 1-P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\leq\frac{0.27-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)\\
&\overset{TLC}{\simeq} 1-\Phi\left(\frac{0.27-\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{\frac{3}{80}}}{\sqrt{100}}}\right)\\
&\simeq 1-\Phi(1.03)\\
&\overset{tabela/calc}{=} 1-0.8485\\
&= 0.1515.
\end{aligned}$$

2. Seja (X,Y) um par aleatório contínuo, onde X e Y representam os tempos até falha (em 10^4 hora) de cada uma de duas componentes eletrónicas, com a função de densidade de probabilidade conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1 \text{ e } 0<y<2x\\ 0, & \text{caso contrário.}\end{cases}$$

(a) Calcule $P(X\leq 0.5)$. (2.0)

- **Par aleatório**
  (X,Y)
  X = tempo até falha da componente 1
  Y = tempo até falha da componente 2

- **F.d.p. conjunta de (X,Y)**

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1 \text{ e } 0<y<2x\\ 0, & \text{c.c.}\end{cases}$$

- **F.d.p. marginal de X**

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy \\ &= \begin{cases} \int_0^{2x} dy = 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \end{aligned}$$

- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned} P(X \le 0.5) &= \int_0^{0.5} f_X(x)\,dx \\ &= x^2\Big|_0^{0.5} \\ &= 0.25. \end{aligned}$$

(b) Deduza a função de densidade de probabilidade marginal de Y e averigúe se as variáveis aleatórias X e Y são independentes. (2.0)

- **F.d.p. marginal de Y**

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx \\ &= \begin{cases} \int_{\frac{y}{2}}^{1} dx = 1 - \frac{y}{2}, & 0 < y < 2 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \end{aligned}$$

- **Averiguação de independência**

X e Y são v.a. INDEPENDENTES sse

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \times f_Y(y), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Por um lado, temos

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \text{ e } 0 < y < 2x \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Por outro lado,

$$f_X(x) \times f_Y(y) = \begin{cases} 2x \times \left(1 - \frac{y}{2}\right), & 0 < x < 1 \text{ e } 0 < y < 2 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Logo

$$f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x) \times f_Y(y), \quad \text{para} \quad 0 < x < 1 \text{ e } 0 < y < 2,$$

e, como tal, X e Y são v.a. DEPENDENTES.

[Em alternativa, poderíamos referir que, por um lado, temos

$$f_{X,Y}(0.1, 0.5) = 0.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} f_X(0.1) \times f_Y(0.5) &= (2 \times 0.1) \times \left(1 - \frac{0.5}{2}\right) \\ &= 0.15. \end{aligned}$$

Logo

$$f_{X,Y}(0.1, 0.5) \neq f_X(0.1) \times f_Y(0.5),$$

e, como tal, X e Y são v.a. DEPENDENTES.]