INSTITUTO
SUPERIOR
TÉCNICO

Sinais e Sistemas Mecatrónicos

Análise de Sistemas no Domínio do Tempo

Estabilidade

José Sá da Costa

Análise e Projecto de Sistemas

A análise e a síntese (projecto) são duas etapas essenciais no estudo de sistemas

- **Análise**

  Com base no **modelo** matemático do sistema estuda-se a **resposta** deste a sinais de entradas específicos, nos domínios do **tempo** e da **frequência**, determinando-se as suas características de **desempenho**.

- **Projecto**

  Tendo em conta os **requisitos de desempenho** que se pretende para o sistema, ou para a cadeia de medida, altera-se o mesmo, introduzindo **dispositivos correctores** (compensadores, filtros, reguladores, etc.) que permitam no conjunto satisfazer os requisitos desejados.

Nota: Apenas se consideram Sistemas Lineares Invariantes no Tempo (SLIT)

Análise de Sistemas

Etapas de Análise

Em termos gerais há três etapas principais na análise de sistemas e em particular para o caso de sistemas com realimentação (ou retroacção, ou em anel fechado):

- O grau ou extensão da **estabilidade dos sistemas**
  - Estabilidade absoluta – saber se o sistema é ou não estável.
  - Estabilidade relativa – saber quão próximo está o sistema da instabilidade.
- O desempenho da **resposta permanente** – pretende-se saber se há ou não erro da resposta estacionária do sistema (parte da resposta que não tende para zero à medida que o tempo tende para infinito) relativamente ao sinal de entrada.
- As características da **resposta transitória** – características da parte da resposta do sistema que tende para zero (ou decresce), à medida que o tempo tende para infinito.

Nota: Há uma forte correlação entre estabilidade relativa e a resposta transitória em sistemas com realimentação.

Estabilidade de Sistemas

Estabilidade Absoluta

- A estabilidade de um sistema é uma característica intrínseca do sistema que só transparece quando da sua resposta às entradas ou perturbações.

- Intuitivamente um sistema estável é aquele que permanecerá em repouso a não ser que excitado por fonte externa e que retornará ao estado de repouso se todas as excitações forem removidas.

- ***Definição 1*** : Um sistema é estável se a sua resposta ao impulso unitário tende para zero à medida que o tempo tende para infinito.

- ***Definição 2*** : Um sistema é estável se para qualquer entrada delimitada produz uma saída delimitada (BIBO – Bounded Input Bounded Output).

Nota: Entende-se por entrada delimitada (ou circunscrita), uma entrada cujas grandezas sejam menores do que algum valor finito ao longo de todo o tempo.

Estabilidade de Sistemas

Estabilidade Absoluta (cont.)

Modelo matemático de um SLIT

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^{m} b_i \frac{d^i x(t)}{dt^i} \; , \quad a_n = 1 \text{ e } m \le n$$

com condições iniciais

$$\left.\frac{d^k y(t)}{dt^k}\right|_{t=0} \equiv y_0^k, \quad k = 0,1,\ldots,n-1 \text{ e } \left.\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right|_{t=0} \equiv x_0^k, \quad k = 0,1,\ldots,m-1$$

A transformada de Laplace da equação anterior virá dada por

$$Y(s) = \left[\frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}\right] X(s) - \frac{\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{i-1} b_i s^{i-1-k} x_0^k}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} + \frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i-1} a_i s^{i-1-k} y_0^k}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}$$

Estabilidade de Sistemas

Estabilidade Absoluta (cont.)

A transformada de Laplace inversa da equação anterior virá dada por

$$y(t) = L^{-1}\left[\frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} X(s) - \frac{\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{i-1} b_i s^{i-1-k} x_0^k}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}\right] + L^{-1}\left[\frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i-1} a_i s^{i-1-k} y_0^k}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}\right]$$

Caso as condições iniciais sejam nulas (CI=0) obtém-se a função de transferência

$$y(t) = L^{-1}\left[\frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} X(s)\right]$$

Estabilidade de Sistemas

Estabilidade Absoluta (cont.)

Esta função de transferência pode ser escrita na forma racional

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} = \frac{b_m \prod_{i=0}^{m} (s - z_i)}{\prod_{i=0}^{n} (s - p_i)}$$

sendo

- **Pólos** do sistema são as raízes da equação característica do denominador

$$\prod_{i=0}^{n} (s - p_i) = 0$$

- **Zeros** do sistema são as raízes da equação característica do numerador

$$\prod_{i=0}^{m} (s - z_i) = 0$$

Estabilidade de Sistemas

Estabilidade Absoluta (cont.)

A transformada de Laplace inversa da função de transferência anterior para uma entrada impulso unitário virá dada por

$$L^{-1}\left[b_n + \sum_{i=0}^{r}\sum_{k=1}^{n_i}\frac{c_{ik}}{(s-p_i)^k}\right] = b_n\delta(t) + \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{n_i}\frac{c_{ik}}{(k-1)!}\; t^{k-1}e^{p_i t}$$

onde

$\delta(t)$ é a função impulso unitário

$b_n = 0,$ a não ser que $m = n$

c_{ik} são os resíduos no pólo p_i

Nota: se o pólo estiver no semi-plano direito o termo exponencial terá expoente positivo e a resposta diverge para infinito quando o tempo tende para infinito, sendo o **sistema instável**.

Estabilidade de Sistemas

Estabilidade Absoluta (cont.)

Sistema estável se todos os pólos do sistema estiverem no semi-plano complexo esquerdo (SPCE)

Sistema marginalmente estável se o sistema tiver alguns pólos com parte real nula, mas nenhum com parte real positiva.

- Neste caso, a resposta ao impulso não tende para zero, embora seja delimitada.
- Certas entradas produzirão saídas não delimitadas, o que permite concluir que os sistemas marginalmente estáveis são instáveis.
- *Exemplo* : $(s^2 + 1)\ Y(s) = X(s)$

  a equação característica virá dada por

  $s^2 + 1 = 0$ com raízes em $\pm j$

  a resposta a perturbações é oscilatória

  a resposta a $x(t) = \text{sen}\ t$ é $\text{y(t)} = t.\text{sen}\ t$

  sistema instável.

Estabilidade de Sistemas

Critério de Estabilidade de Routh

Critério aplicável a sistemas de ordem n, com a equação característica do denominador na forma

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0 \quad \text{com } a_n \neq 0$$

isto é, assume-se que se existem raízes nulas estas foram previamente removidas.

Critério

- Se algum dos coeficientes da equação característica é nulo ou negativo, na presença de pelo menos um coeficiente positivo, então existe uma raiz ou raízes que são imaginárias, ou que têm parte real positiva. Neste caso, pode-se concluir que o sistema não é estável (instável).
- Para um sistema ser estável é condição necessária, mas não suficiente, que todos os coeficientes da equação característica tenham o mesmo sinal. Para concluir da estabilidade neste caso, é necessário uma análise adicional.

Estabilidade de Sistemas

Critério de Estabilidade de Routh (cont.)

No caso de todos os coeficientes da equação característica terem o mesmo sinal, para se concluir sobre a estabilidade, é necessário construir a Tabela de Routh

$$
\begin{array}{l|llll}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \ldots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \ldots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \ldots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
s^2 & d_1 & d_2 & & \\
s^1 & e_1 & & & \\
s^0 & f_1 & & &
\end{array}
$$

Estabilidade de Sistemas

Critério de Estabilidade de Routh (cont.)

$$
\begin{array}{l|lllll}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \ldots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \ldots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \ldots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
s^2 & d_1 & d_2 & & \\
s^1 & e_1 & & & \\
s^0 & f_1 & & &
\end{array}
$$

Estabilidade de Sistemas

Critério de Estabilidade de Routh (cont.)

onde n_a, $n_{a\text{-}1}$, …, a_0 são os coeficientes da equação característica e os coeficientes b_i e c_i são dados por

$$b_1 \equiv \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}, \quad b_2 \equiv \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}, \quad etc.$$

$$c_1 \equiv \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1}, \qquad c_2 \equiv \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1}, \quad etc.$$

• A tabela é continuada horizontalmente e verticalmente até que apenas zeros sejam obtidos.

• Qualquer linha pode ser multiplicada por uma constante antes que a próxima linha seja calculada, sem que as propriedades da tabela sejam afectadas.

Estabilidade de Sistemas

Critério de Estabilidade de Routh (cont.)

Critério referente à Tabela

- Todas as raízes desta equação característica têm partes reais negativas, se e somente se os elementos da primeira coluna da tabela têm o mesmo sinal. Neste caso o sistema é estável.
- O número de raízes com parte real positiva é igual ao número de mudanças de sinal na primeira coluna.

Conclusão sobre o critério de Routh

É condição necessária e suficiente para um sistema ser estável, que todos os coeficientes da equação característica tenham o mesmo sinal e que todos os coeficientes da primeira coluna da Tabela de Routh tenham o mesmo sinal.

Estabilidade de Sistemas

Critério de Estabilidade de Routh

Exemplo 1: Seja $a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$ onde todos os coeficientes são positivos.

A tabela de Routh é dada por

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^3 & a_3 & a_1 & 0 \\
s^2 & a_2 & a_0 & \\
s^1 & \dfrac{a_2 a_1 - a_3 a_0}{a_2} & & \\
s^0 & a_0 & &
\end{array}
$$

- O sistema é estável se $a_2 a_1 > a_3 a_0$, visto neste caso não haver mudanças de sinal na primeira coluna da tabela.

Estabilidade de Sistemas

Critério de Estabilidade de Routh (cont.)

Exemplo 2: Seja $s^3 + 6s^2 + 12s + 8 = 0$

Existem todos os coeficientes da eq. característica que têm sinal positivo, o que implica que tenhamos de analisar a Tabela de Routh para concluir sobre a estabilidade.

A tabela de Routh é dada por

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^3 & 1 & 12 & 0 \\
s^2 & 6 & 8 & \\
s^1 & \dfrac{64}{6} & & \\
s^0 & 8 & &
\end{array}
$$

Visto neste caso não haver mudanças de sinal na primeira coluna da tabela, o sistema é estável.

Estabilidade de Sistemas

Critério de Estabilidade de Routh (cont.)

Exemplo 3: Seja $s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + K = 0$

Todos os coeficientes positivos, sendo a tabela de Routh dada por

$$
\begin{array}{c|cc}
s^3 & 1 & 3 \\
s^2 & 3 & 1+K \\
s^1 & \dfrac{8-K}{3} & \\
s^0 & 1+K &
\end{array}
$$

Para não haver mudanças de sinal na primeira coluna (sistema estável), é necessário que:

- $8 - K > 0, \ 1 + K > 0$
- Ou seja, que $-1 < K < 8$

Estabilidade de Sistemas

Critério de Estabilidade de Routh (cont.)

Exemplo 3 cont.:

Nota: Uma linha de zeros para s^1 *da tabela de Routh, indica que o polinómio da linha* s^2 *tem um par de raízes que satisfaz a equação auxiliar:*

$$As^2 + B = 0$$

onde A e B são os primeiros e segundos elementos da linha s^2*.*

No exemplo, a linha s^1 é zero se $K = 8$. Neste caso a equação auxiliar é

$$3s^2 + K + 1 = 3s^2 + 9 = 0$$

Portanto duas raízes da equação característica são

$$s = \pm j\sqrt{3}$$

Logo o sistema é marginalmente estável (sistema instável).

Estabilidade de Sistemas

Critério de Estabilidade de Routh (cont.)

Exemplo 4: Seja $s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 = 0$

A tabela de Routh é dada por

$$\begin{array}{c|ccc}
s^5 & 1 & 24 & -25 \\
s^4 & 2 & 48 & -50 \\
s^3 & 0 & 0 &
\end{array}$$

Polinómio auxiliar $P(s)$ (linha s^4)

Notar que estes casos só acontecem em linhas de potência ímpar.

$$P(s) = 2s^4 + 48s^2 - 50$$

O que indica que há dois pares de raízes de igual magnitude e sinal oposto (reais, ou complexos conjugados).

Estes pares são obtidos resolvendo $P(s) = 0$, o que não é fácil.

Notar que a derivada em ordem a s de $P(s)$ é $\dfrac{dP(s)}{ds} = 8s^3 + 96s$

Estabilidade de Sistemas

Critério de Estabilidade de Routh (cont.)

Exemplo 4 cont.: Substituindo os zeros da linha s^3 por 8 e 96, a tabela de Routh virá

$$
\begin{array}{l|lll}
s^5 & 1 & 24 & -25 \\
s^4 & 2 & 48 & -50 \\
s^3 & 8 & 96 & \leftarrow \text{Coeficientes de } dP(s)/ds \\
s^2 & 24 & -50 & \\
s^1 & 112{,}7 & & \\
s^0 & -50 & &
\end{array}
$$

Da análise da tabela conclui-se que há uma mudança de sinal, logo sistema instável.

As raízes são $s = \pm 1,\ \ s = \pm j5$ e $s = -2$

Estabilidade de Sistemas

Critério de Estabilidade de Routh (cont.)

Exemplo 5: Seja $s^3 + 2s^2 + s + 2 = 0$

A tabela de Routh é dada por

$$
\begin{array}{c|cc}
s^3 & 1 & 1 \\
s^2 & 2 & 2 \\
s^1 & 0 \approx \varepsilon & \\
s^0 & 2 &
\end{array}
$$

No caso de haver um coeficiente nulo na primeira coluna, sendo os restantes elementos diferentes de zero, ou não exista termo remanescente, deve-se substituir o zero por uma quantidade positiva pequena ε e recalcular a tabela a partir desse elemento.

Neste caso as raízes do polinómio são -2 e $\pm j$ sendo o sistema marginalmente estável, ou seja instável.

Nota: *é sempre possível nestes casos seguir a técnica de substituição* da linha pelo polinómio auxiliar (ver ex. 4)

Estabilidade de Sistemas

Critério de Estabilidade de Routh (cont.)

Exemplo 6: Seja $s^3 - 3s + 2 = (s-1)^2(s+2) = 0$

A tabela de Routh é dada por

$$\begin{array}{c|cc}
s^3 & 1 & -3 \\
s^2 & 0 \approx \varepsilon & 2 \\
s^1 & -3 - \dfrac{2}{\varepsilon} & \\
s^0 & 2 &
\end{array}$$

Como se pode verificar há duas mudanças de sinal na 1ª coluna, o que está de acordo com a factorização da equação característica que acima se indica.

Nota: Atendendo ao critério de Routh, neste exemplo, não era necessário construir a tabela de Routh para sabermos que o sistema era instável. Bastava observar a equação característica onde há um coeficiente nulo. No entanto, já a teríamos de construir caso pretendêssemos ajustar um parâmetro de ganho K para a resposta ter um comportamento desejado (ex. erro estacionário nulo).