



INSTITUTO
SUPERIOR
TÉCNICO

Sinais e Sistemas Mecatrónicos

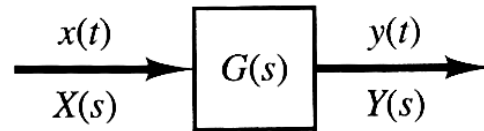
Análise de Sistemas
No Domínio da Frequência
Diagramas de Bode

José Sá da Costa

Análise em Frequência

Uma forma distinta de caracterizar a resposta dum sistema é fazê-lo no domínio da frequência, i.e. à resposta estacionária do sistema a entradas sinusoidais num certo intervalo de interesse.

$$x(t) = X \sin \omega t$$



$$y(t) = Y \sin(\omega t + \phi)$$

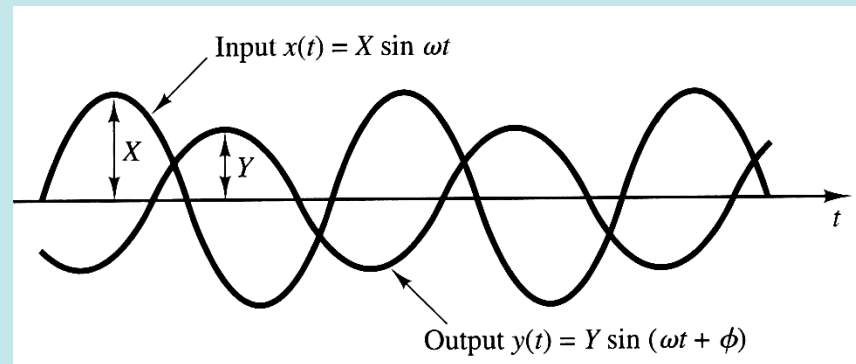
$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G(s)$$

Amplitude

$$Y = X |G(j\omega)|$$

Fase

$$\phi = \angle G(j\omega) = \tan^{-1} \left[\frac{\text{imaginary part of } G(j\omega)}{\text{real part of } G(j\omega)} \right]$$



Diagramas de Bode

Representação via Diagramas de Bode

Os diagramas de Bode compõe-se de:

- **Curva de magnitudes:** representa a evolução do termo $A(\omega)$ em escala logarítmica da frequência. Utiliza-se a unidade decibel para esta representação:

$$20 \log_{10} A(\omega) = 20 \log_{10} |G(j\omega)|$$

- **Curva de fases:** representa a evolução do termo $\phi(\omega)$ em escala logarítmica da frequência. Utiliza-se a escala em graus para esta representação:

$$\phi(\omega) = \arg[G(j\omega)]$$

Uma função de transferência genérica pode ser factorizada na forma

$$G(s) = K \frac{(T_1s + 1)(T_2s + 1) \cdots}{s^t (T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}$$

Como vimos nas aulas iniciais, basta fazer $s = j\omega$ para se obter a resposta em frequência do sistema LIT

$$G(j\omega) = K \frac{(T_1j\omega + 1)(T_2j\omega + 1) \cdots}{(j\omega)^t (T_a j\omega + 1)(T_b j\omega + 1) \cdots}$$

Diagramas de Bode

Representação via Diagramas de Bode

Curva de magnitudes:

$$|G(j\omega)| = \frac{|K| \cdot |T_1 j\omega + 1| \cdot |T_2 j\omega + 1| \cdots}{|(j\omega)^t| \cdot |T_a j\omega + 1| \cdot |T_b j\omega + 1| \cdots}$$
$$20 \log_{10} |G(j\omega)| = 20 \log_{10} |K| + 20 \log_{10} |T_1 j\omega + 1| + \cdots \\ - 20 \log_{10} |(j\omega)^t| - 20 \log_{10} |T_a j\omega + 1| - \cdots$$

Curva de fases:

$$\arg[G(j\omega)] = \arg[\text{Numerador } G(j\omega)] - \arg[\text{Denominador } G(j\omega)]$$
$$= \arg[K(T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1) \cdots] - \arg[(j\omega)^t(T_a j\omega + 1) \cdots]$$
$$= \arg[K] + \arg[T_1 j\omega + 1] + \cdots - \arg[(j\omega)^t] - \arg[T_a j\omega + 1] - \cdots$$

onde

$$\arg[a + jb] = \arctan(b/a)$$

Diagramas de Bode

Regras básicas de construção de Diagramas de Bode

Para uma função de transferência de ganho positivo, com n pólos e m zeros no SPCE (semi-plano complexo esquerdo), verificam-se as seguintes regras para o diagrama de Bode representado em escala decimal logarítmica:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} [\text{declive curva magnitudes}] = -20(n - m) \text{ dB/dec}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg[G(j\omega)] = -90(n - m)^\circ$$

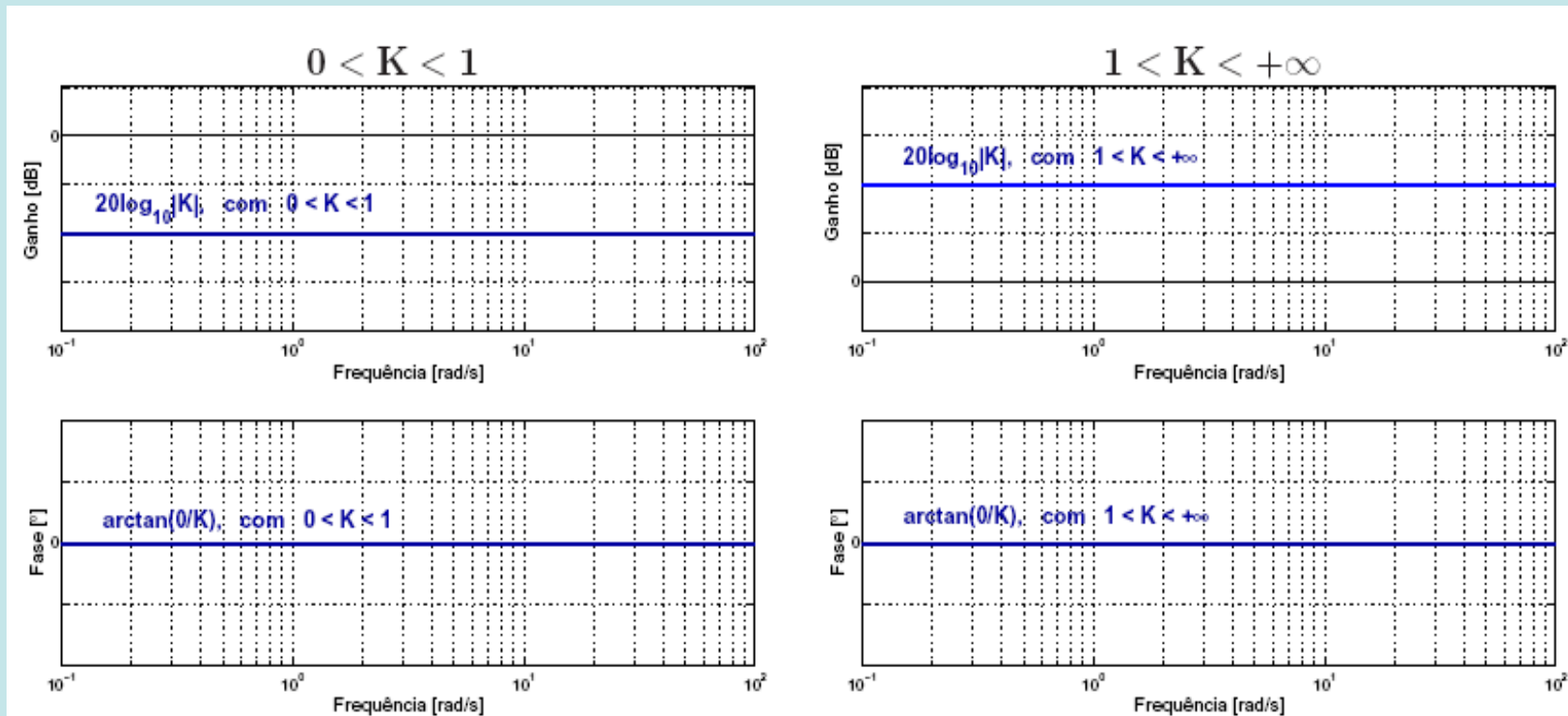
Nota: caso o sistema tenha ganho negativo, ou um pólo ou um zero no SPCD (semi-plano complexo direito), as regras anteriores deixam de ser válidas!

Atendendo à factorização da função de transferência, é possível verificar que apenas existirão factores constantes, pólos e zeros reais e pólos e zeros complexos conjugados.

Diagramas de Bode

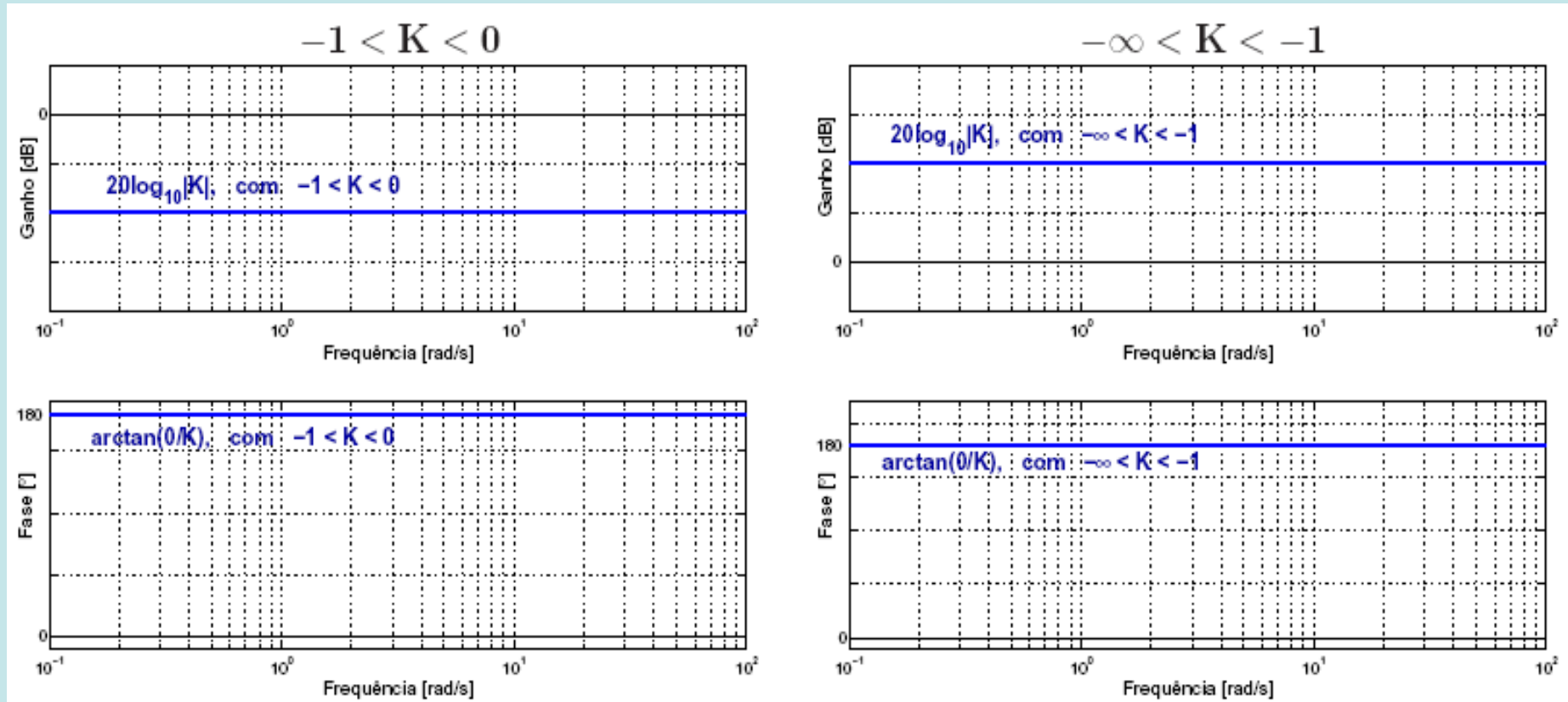
Factor Ganho (constante positiva)

$$G(j\omega) = K \implies \begin{cases} \text{Curva de magnitudes} & : 20 \log_{10} |G(j\omega)| = 20 \log_{10} |K| \\ \text{Curva de fases} & : \arg[G(j\omega)] = \arg[K] = \arctan\left(\frac{0}{K}\right) \end{cases}$$



Diagramas de Bode

Factor Ganho (constante negativa)



Diagramas de Bode

Factor Integral ou Derivativo

$$G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^t}$$

Curva de magnitudes:

$$\begin{aligned} 20 \log_{10} |G(j\omega)| &= 20 \log_{10} \left| \frac{1}{(j\omega)^t} \right| = 20 \log_{10} |1| - 20 \log_{10} |(j\omega)^t| \\ &= -20 \log_{10} |(j\omega)^t| = -20 t \log_{10} |j\omega| = -20 t \log_{10} \omega \end{aligned}$$

Curva de fases

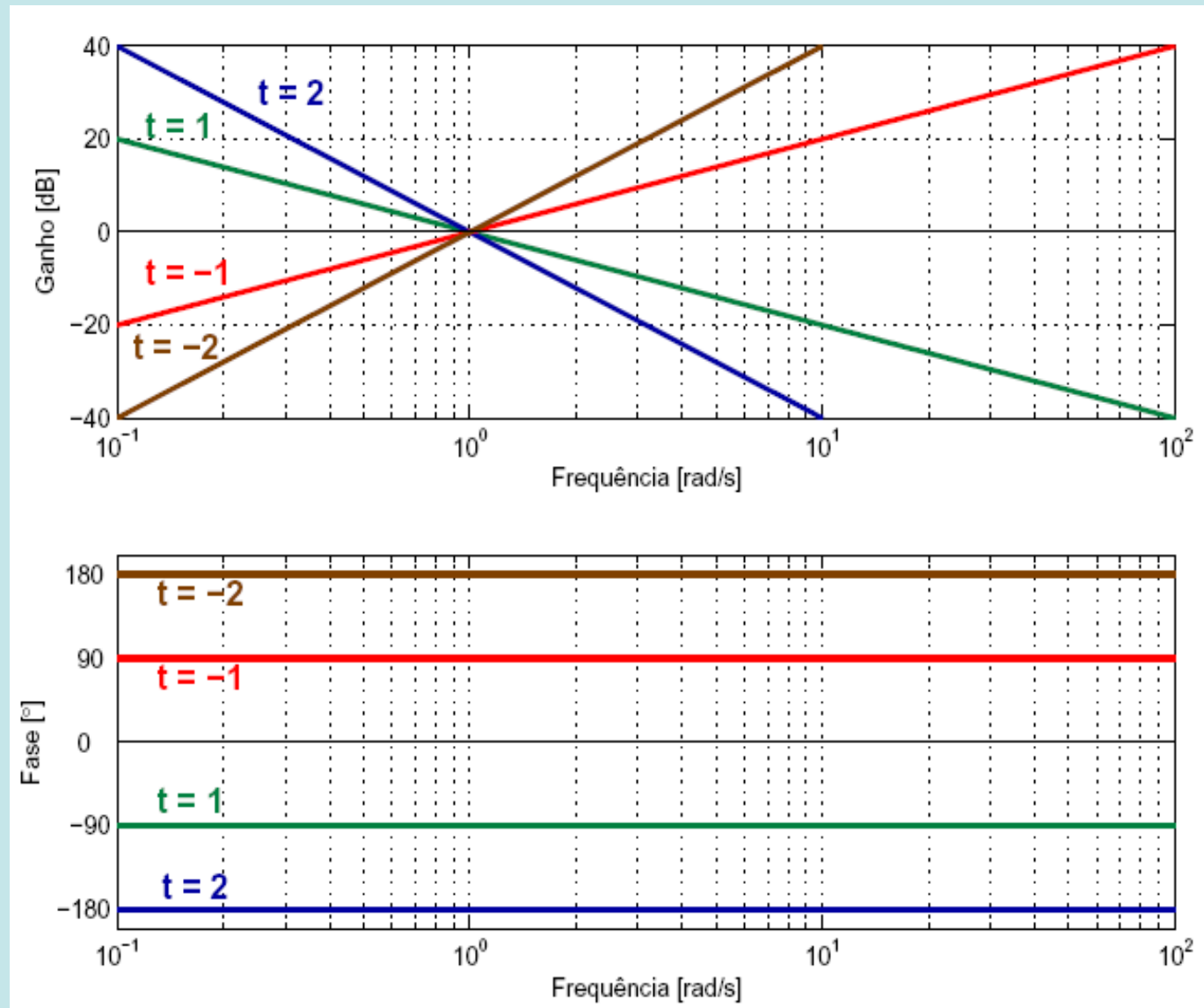
$$\arg[G(j\omega)] = \arg[1] - \arg[(j\omega)^t] = \underbrace{\arctan\left(\frac{0}{1}\right)}_{=0} - t \arctan\left(\frac{\omega}{0}\right) = -t 90^\circ$$

Diagramas de Bode

Factor Integral
e Derivativo

Curva de magni-
tudes

Curva de fases



Diagramas de Bode

Factor de 1ª ordem (pólo ou zero real)

$$G(j\omega) = (Tj\omega + 1)^{\pm 1}$$

Caso de pólo no SPCE

$$G(j\omega) = (Tj\omega + 1)^{-1} = \frac{1}{Tj\omega + 1}$$

Curva de magnitudes:

$$20 \log_{10} |G(j\omega)| = 20 \log_{10} \left| \frac{1}{Tj\omega + 1} \right| = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}} = -20 \log_{10} \sqrt{T^2\omega^2 + 1}$$

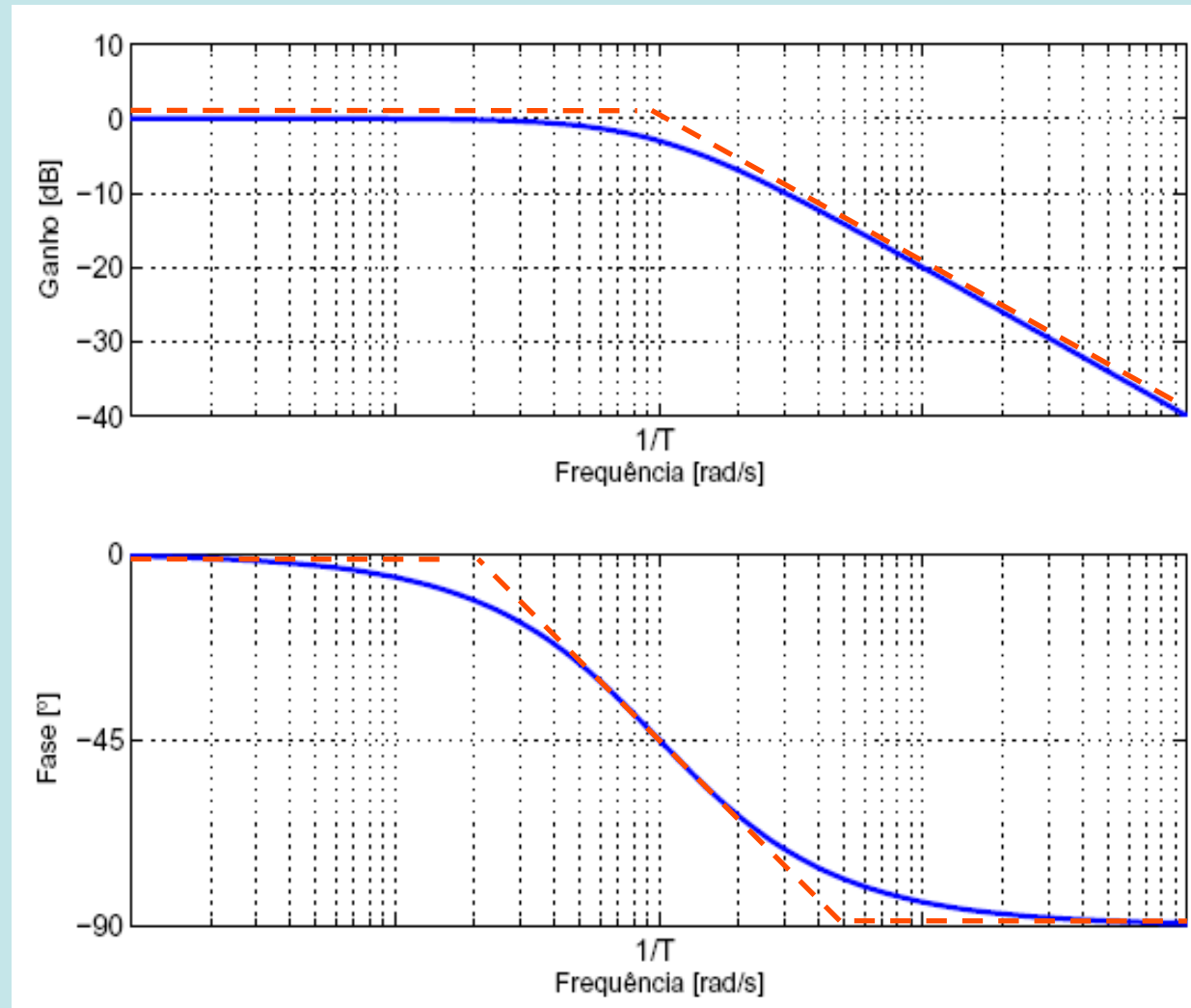
Curva de fases

$$\arg[G(j\omega)] = \arg[1] - \arg[Tj\omega + 1] = -\arg[Tj\omega + 1] = -\arctan\left(\frac{T\omega}{1}\right) = -\arctan(T\omega)$$

Diagramas de Bode

Factor de 1ª ordem
- pólo no SPCE

Curva de magnitudes



Curva de fases

Diagramas de Bode

Factor de 1ª ordem - pólo no SPCE (cont.)

A frequência de corte ω_c deste sistema corresponde à frequência $\omega_c = 1/T$, i.e., frequência para a qual a curva de magnitudes apresenta um valor de $-20 \log_{10} \sqrt{1+1} \approx -3.0$ dB.

- A largura de banda L_b deste sistema corresponde ao intervalo de frequências para o qual não existe atenuação da amplitude da sinusóide de entrada, i.e., a gama de frequências entre 0 e ω_c .
- Para altas frequências, observa-se, à medida que esta aumenta, um decaimento da curva de magnitudes de -20 dB/dec, i.e., a amplitude da sinusóide de saída diminui de forma exponencial à medida que aumenta a frequência da sinusóide de entrada.

Diagramas de Bode

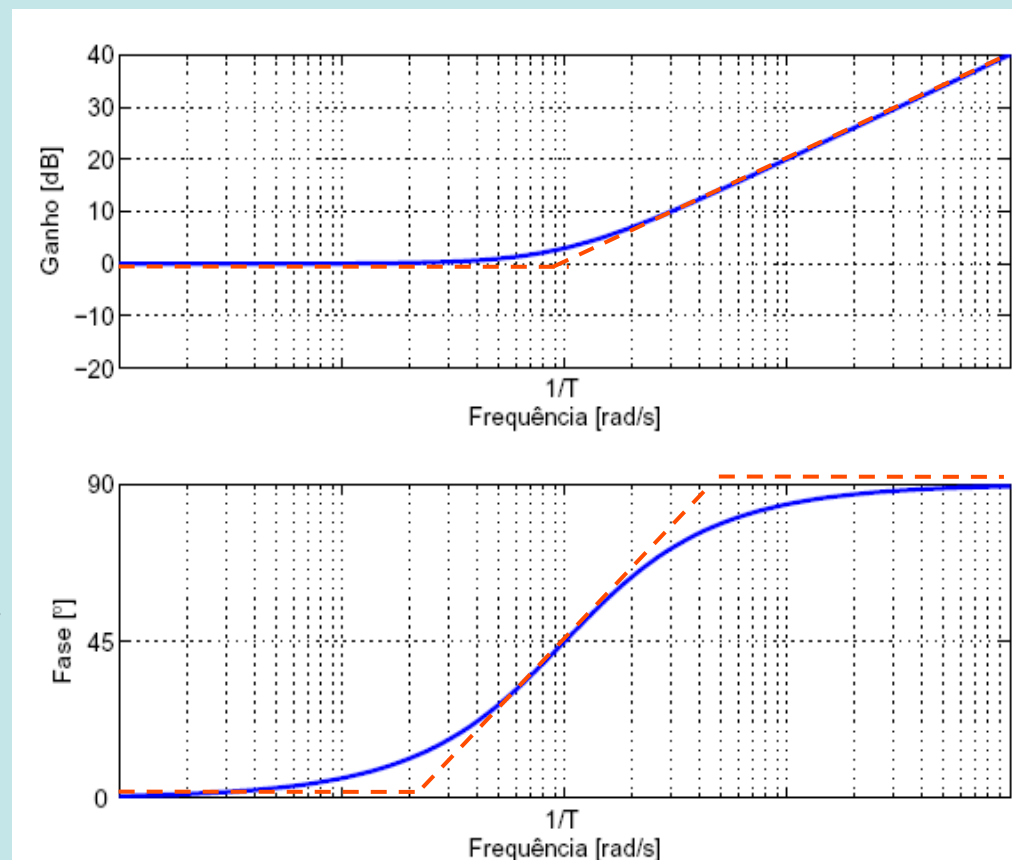
Factor de 1ª ordem - zero no SPCE

$$G(j\omega) = Tj\omega + 1 \Rightarrow \begin{cases} \text{Curva de magnitudes} & : 20 \log_{10} |G(j\omega)| = 20 \log_{10} \sqrt{T^2\omega^2 + 1} \\ \text{Curva de fases} & : \arg[G(j\omega)] = \arg[Tj\omega + 1] = \arctan(T\omega) \end{cases}$$

Curva de magnitudes:

Curva de fases

Nota: o efeito de um zero é amplificar as altas frequências, ou seja, comporta-se como um filtro passa-alto.



Diagramas de Bode

Factor de 1ª ordem - pólo no SPCD

$$G(j\omega) = (-Tj\omega + 1)^{-1} = \frac{1}{-Tj\omega + 1}$$

Curva de magnitudes:

$$20 \log_{10} |G(j\omega)| = 20 \log_{10} \left| \frac{1}{-Tj\omega + 1} \right| = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}} = -20 \log_{10} \sqrt{T^2\omega^2 + 1}$$

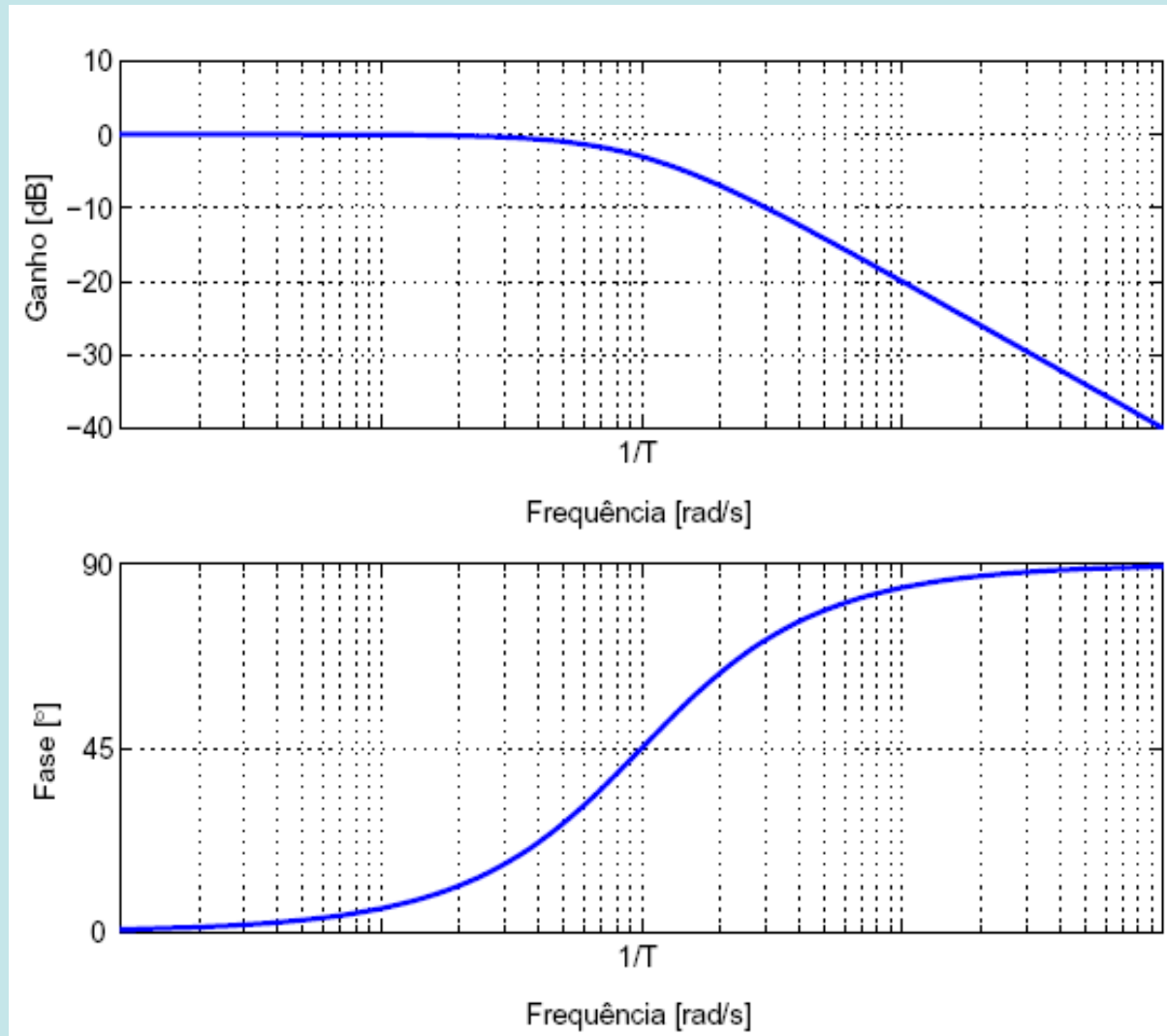
Curva de fases

$$\begin{aligned} \arg[G(j\omega)] &= \arg[1] - \arg[-Tj\omega + 1] = -\arg[-Tj\omega + 1] = -\arctan\left(\frac{-T\omega}{1}\right) = \\ &= -\arctan(-T\omega) = \arctan(T\omega) \end{aligned}$$

Diagramas de Bode

Factor de 1ª ordem - pólo no SPCD (cont.)

Curva de magnitudes



Curva de fases

Diagramas de Bode

Factor de 1ª ordem - pólo no SPCD (cont.)

- Embora o andamento da curva de magnitudes seja idêntico ao caso do pólo estável (SPCE), o andamento da curva de fases é idêntico ao do zero estável (SPCE).
- Considera-se $G(j\omega) = 1/(-Tj\omega + 1)$ e não $G(j\omega) = 1/(Tj\omega - 1)$ pois, apesar de ambas corresponderem a um zero no SPCD, esta última função de transferência tem ganho negativo

$$K = \lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = \frac{1}{(Tj\omega - 1)} = -1$$

o que levaria a curva de fases a subir toda de 180°.

Diagramas de Bode

Factor de 1ª ordem - zero no SPCD

$$G(j\omega) = -Tj\omega + 1$$

Curva de magnitudes:

$$20 \log_{10} |G(j\omega)| = 20 \log_{10} |-Tj\omega + 1| = 20 \log_{10} \sqrt{T^2\omega^2 + 1}$$

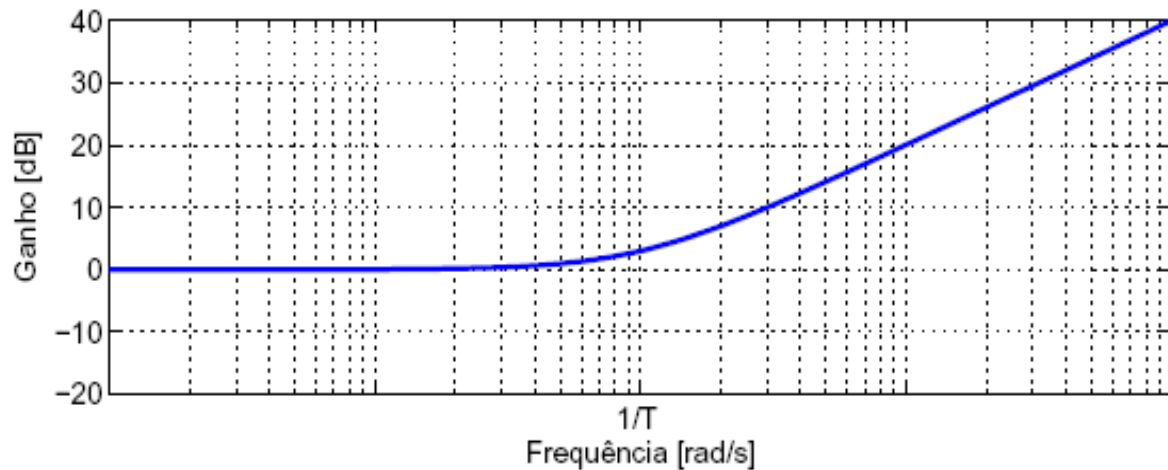
Curva de fases

$$\arg[G(j\omega)] = \arg[-Tj\omega + 1] = \arctan\left(\frac{-T\omega}{1}\right) = \arctan(-T\omega) = -\arctan(T\omega)$$

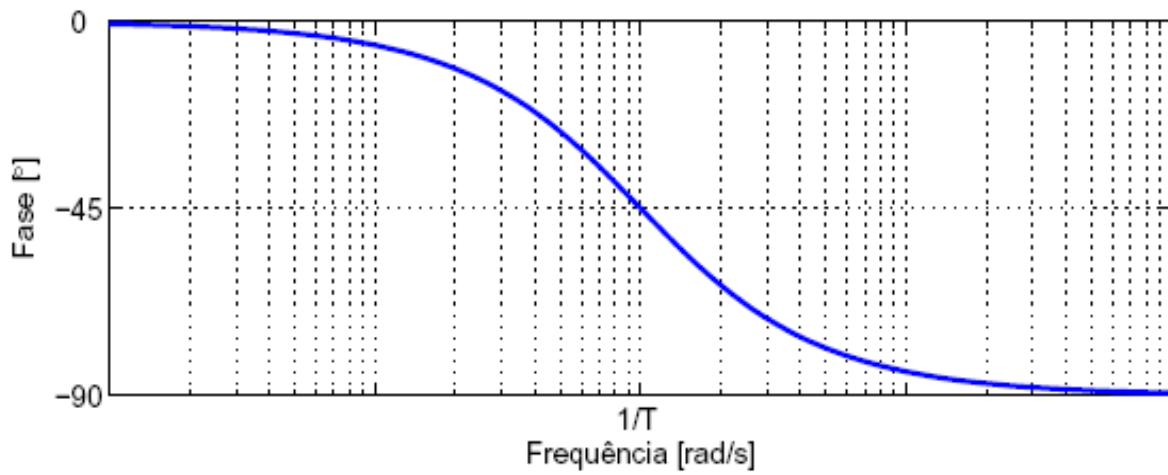
Diagramas de Bode

Factor de 1ª ordem - zero no SPCD (cont.)

Curva de magnitudes



Curva de fases



Diagramas de Bode

Factor de 1ª ordem - zero no SPCD (cont.)

- Embora o andamento da curva de magnitudes seja idêntico ao caso do zero de fase não mínima (SPE), o andamento da curva de fases é idêntico ao do pólo estável (SPE).
- Considera-se $G(j\omega) = (-Tj\omega + 1)$ e não $G(j\omega) = (Tj\omega - 1)$ pois, apesar de ambas corresponderem a um zero no SPCD, esta última função de transferência tem ganho negativo

$$K = \lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = (Tj\omega - 1) = -1$$

o que levaria a curva de fases a subir toda de 180° .

- Denominam-se este tipo de sistemas com (pelo menos) um zero no SPCD, **sistemas de fase não-mínima**.

Diagramas de Bode

Sistemas de fase não-mínima

Seja a seguinte função de transferência de **fase mínima**, $G_1(s)$

$$G_1(s) = \frac{T_2s + 1}{T_1s + 1} \quad \text{com, } T_2 < T_1, T_1 > 0 \text{ e } T_2 > 0$$

- um **zero no SPCE** localizado em $-1/T_2$
- um **pólo estável (SPCE)** localizado em $-1/T_1$

Seja a seguinte função de transferência de **fase não-mínima**, $G_2(s)$

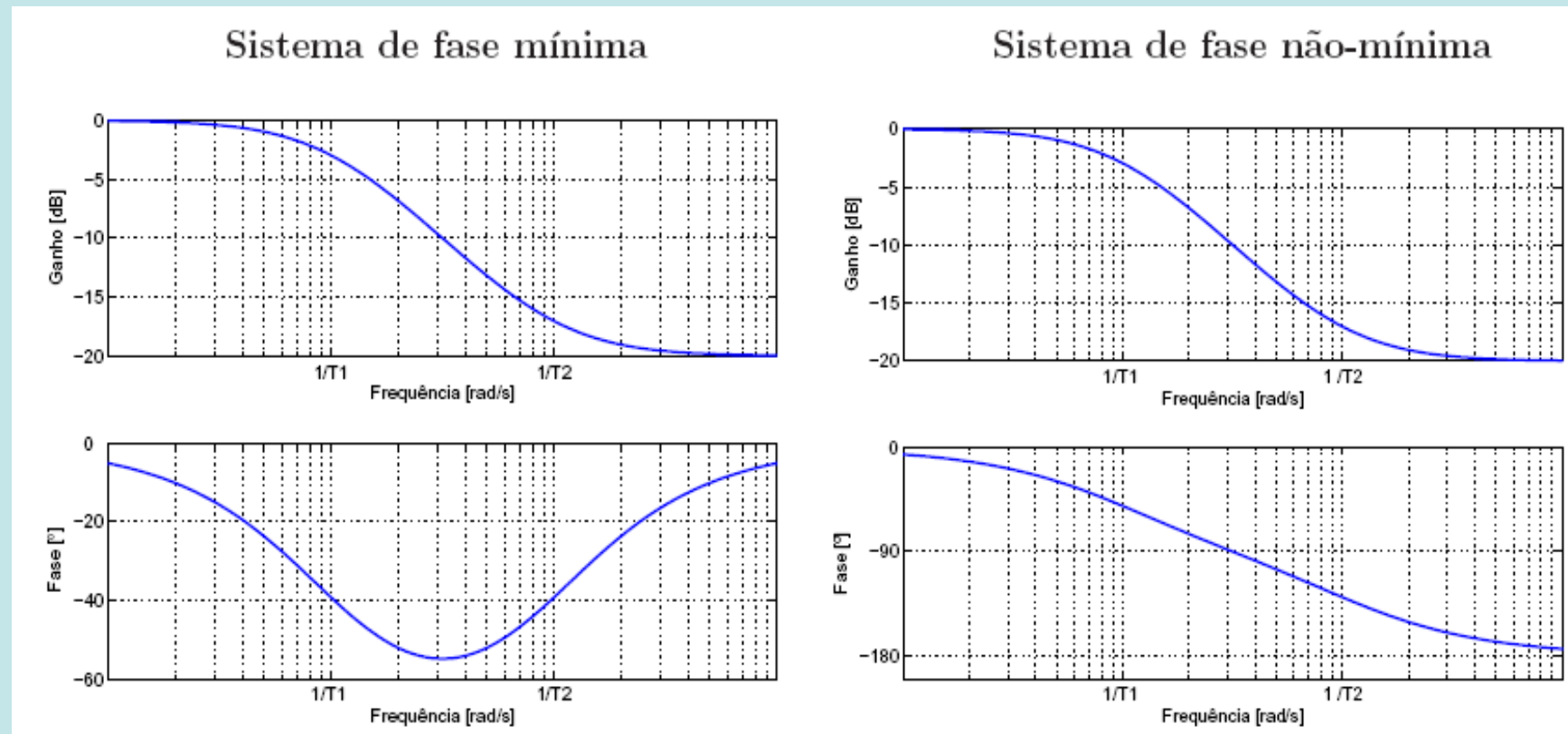
$$G_2(s) = \frac{-T_2s + 1}{T_1s + 1} \quad \text{com, } T_2 < T_1, T_1 > 0 \text{ e } T_2 > 0$$

- um **zero no SPCD** localizado em $1/T_2$
- um **pólo estável (SPCE)** localizado em $-1/T_1$

Diagramas de Bode

Sistemas de fase não-mínima

Comparação



Conclusão: a gama de valores da fase do sistema $G_2(s)$ é superior à do sistema $G_1(s)$ devido ao zero no SPCD. Daí a designação *sistema de fase não-mínima*.

Diagramas de Bode

Factor de 2ª ordem

$$G(j\omega) = \left(\left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_n} + 1 \right)^{\pm 1}$$

2 pólos complexos conjugados estáveis

$$\xi < 1$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_n} + 1} = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\xi\omega_n j\omega + \omega_n^2}$$

Curva de magnitudes:

$$\begin{aligned} 20 \log_{10} |G(j\omega)| &= 20 \log_{10} \left| \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\xi\omega_n j\omega + \omega_n^2} \right| \\ &= -20 \log_{10} \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \end{aligned}$$

Diagramas de Bode

Factor de 2ª ordem: 2 pólos complexos conjugados estáveis

Curva de magnitudes:

Para baixas frequências $\omega \ll \omega_n$

$$20 \log_{10} |G(j\omega)| = -20 \log_{10} \sqrt{1 + 0} = 0 \text{ dB}$$

Para altas frequências $\omega \gg \omega_n$

$$20 \log_{10} |G(j\omega)| = -40 \log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right) \text{ dB}$$

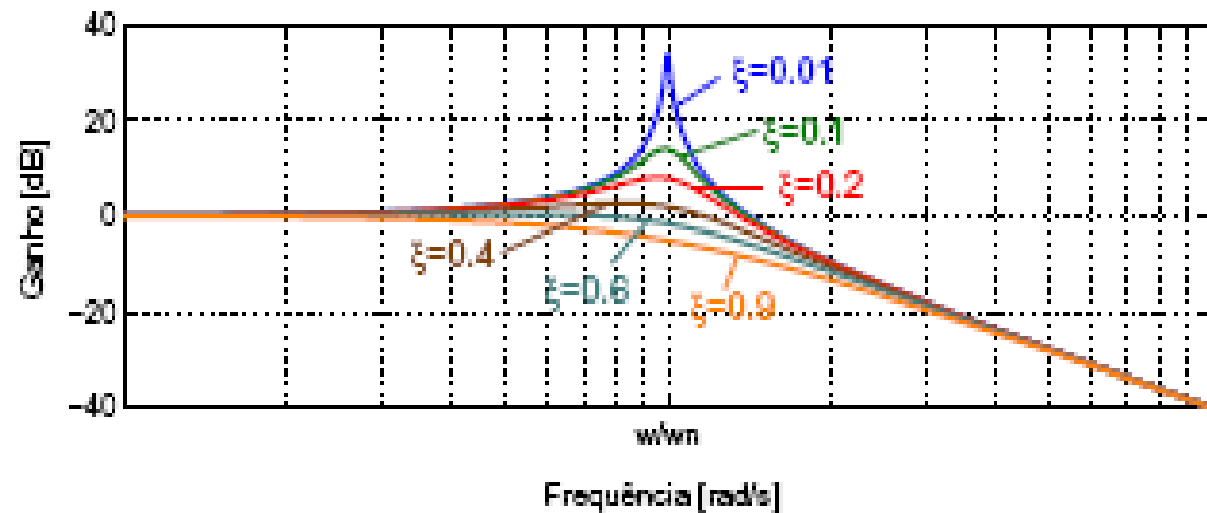
Curva de fases

$$\begin{aligned} \arg[G(j\omega)] &= \arg[1] - \arg[(j\omega/\omega_n)^2 + 2\xi j\omega/\omega_n + 1] \\ &= -\arctan \left(\frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right) \end{aligned} \quad \begin{aligned} \omega \ll \omega_n &: \arg[G(j\omega)] = 0^\circ \\ \omega = \omega_n &: \arg[G(j\omega)] = -\arctan \left(\frac{2\xi}{0} \right) = -90^\circ \\ \omega \gg \omega_n &: \arg[G(j\omega)] = -180^\circ \end{aligned}$$

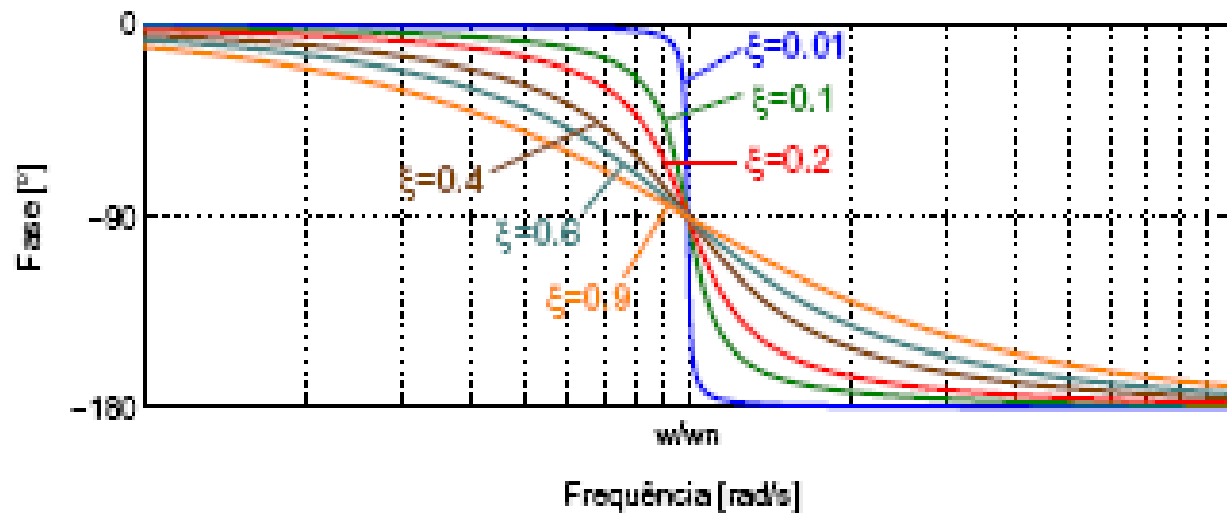
Diagramas de Bode

Factor de 2ª ordem: 2 pólos complexos conjugados estáveis

Curva de magnitudes



Curva de fases

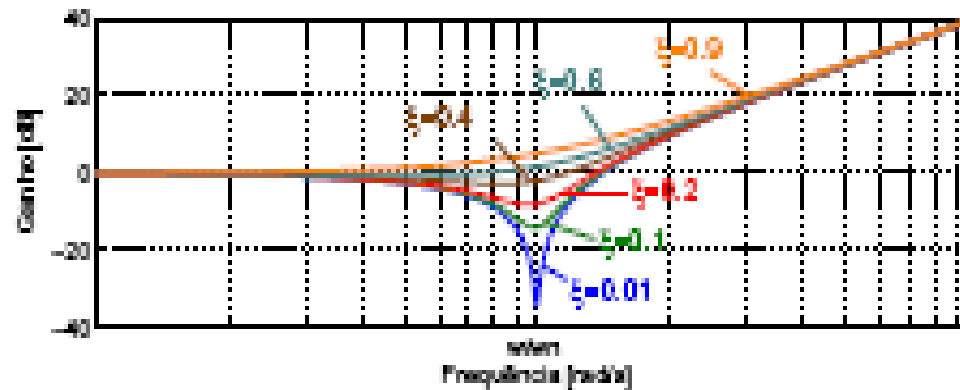


Diagramas de Bode

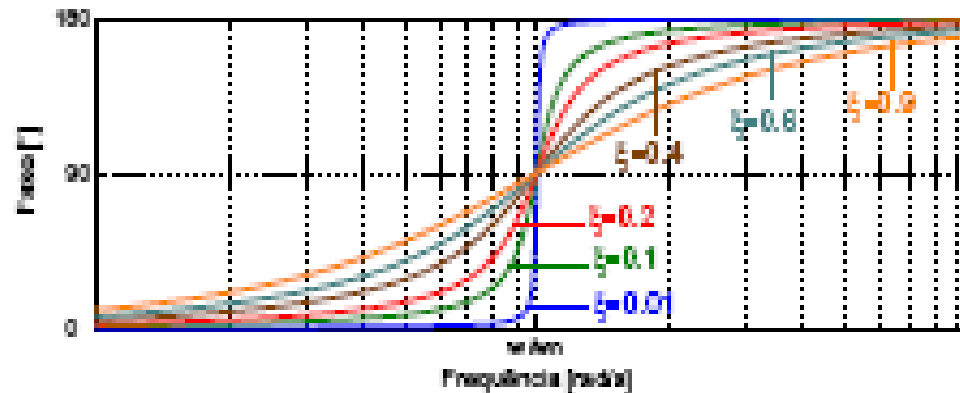
Factor de 2ª ordem: 2 zeros complexos conjugados de fase minima

$$G(j\omega) = \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\xi\frac{j\omega}{\omega_n} + 1 = \frac{(j\omega)^2 + 2\xi\omega_n j\omega + \omega_n^2}{\omega_n^2}$$

Curva de magnitudes



Curva de fases

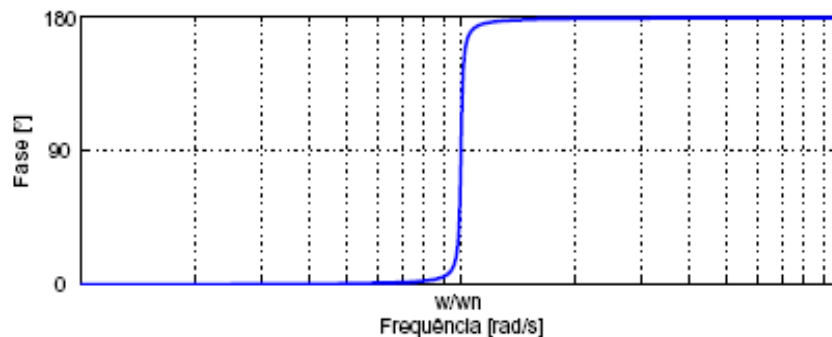
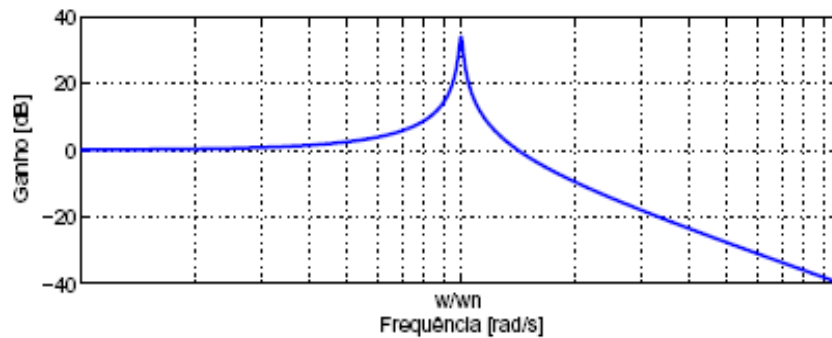


Diagramas de Bode

Factor de 2ª ordem: Caso os pólos, ou os zeros, pertençam ao SPCD, resulta para $\xi=0,01$

Sistema com 2 pólos c.c. no SPD:

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 - 2\xi\omega_n j\omega + \omega_n^2}$$



Sistema com 2 zeros c.c. no SPD:

$$G(j\omega) = \frac{(j\omega)^2 - 2\xi\omega_n j\omega + \omega_n^2}{\omega_n^2}$$

