INSTITUTO
SUPERIOR
TÉCNICO

Sinais e Sistemas Mecatrónicos

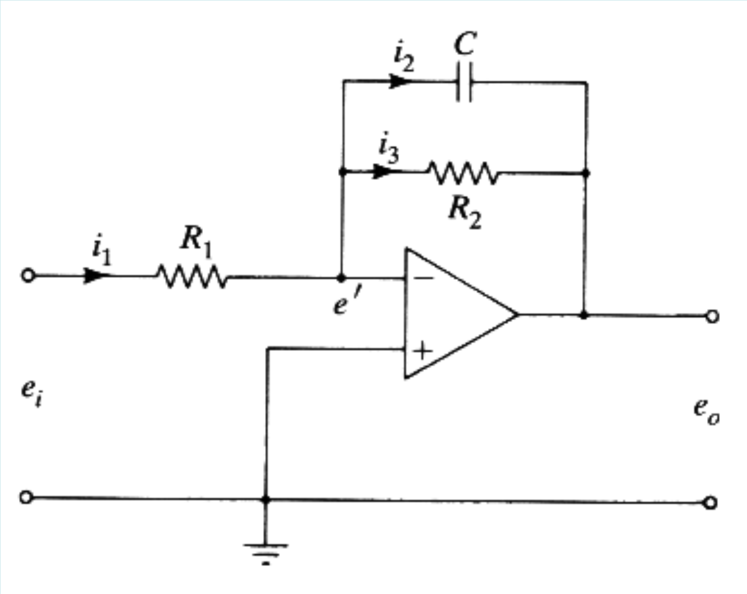
Modelação de Sistemas Físicos

Exemplos

José Sá da Costa

Exemplos de Modelação

Circuito com Ampop



Obtenha a função de transferência do circuito e a resposta ao degrau de amplitude E volts.

Resolução

Seja

$$i_1 = \frac{e_i - e'}{R_1}, \quad i_2 = C\frac{d(e' - e_o)}{dt}, \quad i_3 = \frac{e' - e_o}{R_2}$$

Atendendo a que a corrente que flui para o Ampop é desprezável, teremos

$$i_1 = i_2 + i_3$$

Logo $$\frac{e_i - e'}{R_1} = C\frac{d(e' - e_o)}{dt} + \frac{e' - e_o}{R_2}$$

Como $e' \approx 0$ resulta $$\frac{e_i}{R_1} = -C\frac{de_o}{dt} - \frac{e_o}{R_2}$$

Aplicando transformadas de Laplace, com CI = 0 $$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\frac{R_2}{R_1}\frac{1}{R_2Cs + 1}$$

Exemplos de Modelação

Circuito com Ampop (cont.)

A resposta ao degrau virá dada por

$$E_o(s) = -\frac{R_2}{R_1}\frac{1}{R_2Cs+1}E_i(s)$$

$$= -\frac{R_2}{R_1}\frac{1}{R_2Cs+1}\frac{E}{s}$$

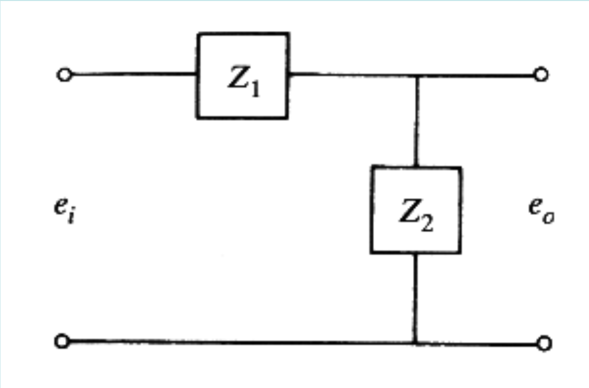
$$= \frac{R_2E}{R_1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1\,/\,(R_2C)}\right]$$

Calculando a transformada inversa de Laplace

$$e_o(t) = \frac{R_2E}{R_1}\left[1 - e^{-t/(R_2C)}\right]$$

Exemplos de Modelação

Utilidade do conceito de impedância



Determine a função de transferência do circuito.

Resolução

Uma função de transferência pode ser vista como uma relação entre impedâncias complexas. Para o circuito da figura, admitindo que e_o é a saída e e_i é a entrada, facilmente obtemos a função de transferência

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{Z_2(s)I(s)}{Z_1(s)I(s) + Z_2(s)I(s)} = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)}$$

Notar que a associação de impedâncias se rege por

Série

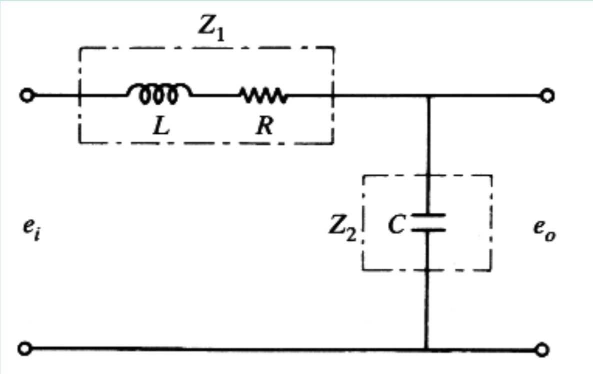
$$Z(s) = Z_1(s) + \cdots + Z_n(s)$$

Paralelo

$$\frac{1}{Z(s)} = \frac{1}{Z_1(s)} + \cdots + \frac{1}{Z_n(s)}$$

Exemplos de Modelação

Utilidade do conceito de impedância (cont.)



Determine a função de transferência do circuito.

Resolução

Designando Z_1 e Z_2 conforme a figura e atendendo ao resultado anterior

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)}$$

e que as impedâncias são dadas respectivamente por

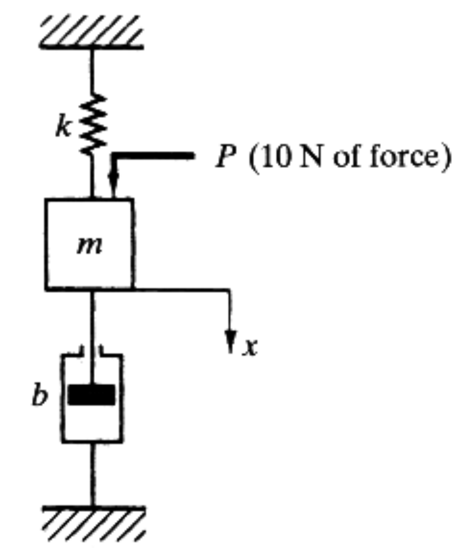
$$Z_1(s) = Ls + R \quad \text{e} \quad Z_2(s) = \frac{1}{Cs}$$

teremos

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} = \frac{\frac{1}{Cs}}{Ls + R + \frac{1}{Cs}} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

Resposta de Sistemas

Resposta de sistemas mecânicos



Supondo que o sistema se encontra inicialmente em repouso e que o deslocamento x é medido relativamente à posição de equilíbrio, sendo

$$m = 1 \text{ kg},\ b = 12 \text{ N.s/m},\ \text{e}\ k = 100 \text{ N/m}$$

Determine a resposta do sistema quando uma força em degrau de 10 N é aplicada na massa.

Resolução

A equação de movimento do sistema é dada por

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = P \quad \text{ou} \quad \ddot{x} + 12\dot{x} + 100x = 10, \quad t \geq 0$$

Aplicando transformadas de Laplace, tendo em conta que as CI são nulas

$$(s^2 + 12s + 100)X(s) = \frac{10}{s}$$

Resposta de Sistemas

Resposta de sistemas mecânicos (cont.)

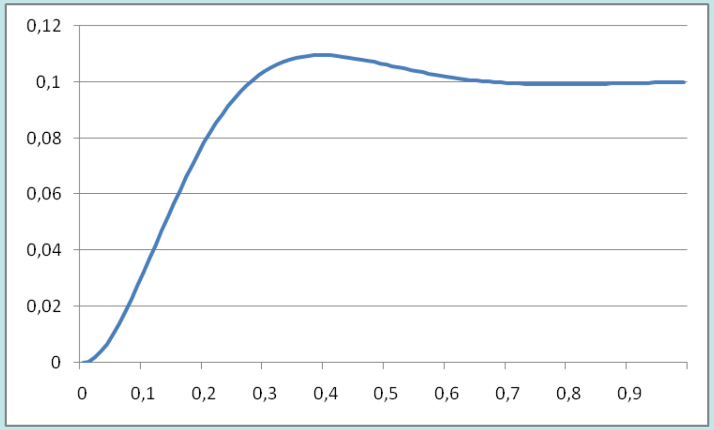
Resolvendo em termos de $X(s)$

$$X(s) = \frac{10}{s(s^2+12s+100)} = \frac{0.1}{s} - \frac{0,1s+1,2}{s^2+12s+100}$$

$$= \frac{0.1}{s} - \frac{0,1(s+6)}{(s+6)^2+8^2} - \left(\frac{0,6}{8}\right)\frac{8}{(s+6)^2+8^2}$$

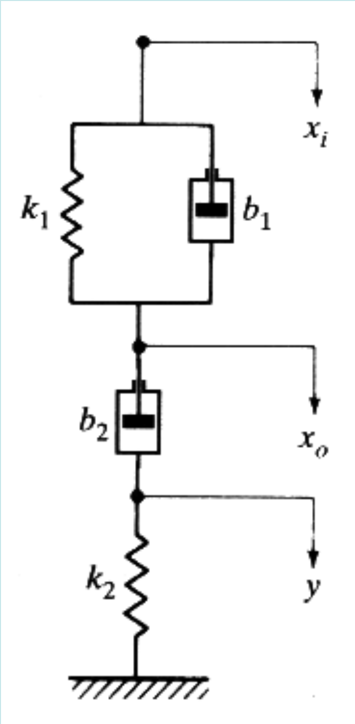
Das Tabelas resulta directamente a transformada inversa de Laplace

$$x(t) = 0,1 - 0,1e^{-6t}\cos\ 8t - 0,075e^{-6t} sen\ 8t$$



Exemplos de Modelação

Resposta de sistemas mecânicos



Determine a função de transferência $X_o(s)/X_i(s)$ do sistema mecânico da figura e obtenha a resposta $x_o(t)$ quando $x_i(t)$ é um degrau de amplitude X_i. Assuma condições iniciais nulas.

$$k_1 = 5 \ N/m, \ k_2 = 10 \ N/m, \ b_1 = 5 \ Ns/m, \ b_2 = 20 \ Ns/m$$

Resolução

O modelo do sistema é dado pelas equações

$$b_1(\dot{x}_i - \dot{x}_o) + k_1(x_i - x_o) = b_2(\dot{x}_o - \dot{y})$$
$$b_2(\dot{x}_o - \dot{y}) = k_2 y$$

Aplicando transformadas de Laplace, tendo em conta que as CI são nulas

$$b_1\left[sX_i(s) - sX_o(s)\right] + k_1\left[X_i(s) - X_o(s)\right] = b_2\left[sX_o(s) - sY(s)\right]$$
$$b_2\left[sX_o(s) - sY(s)\right] = k_2 Y(s)$$

Exemplos de Modelação

Resposta de sistemas mecânicos (cont.)

Eliminando $Y(s)$ das equações obtém-se a função de transferência $X_o(s)/X_i(s)$

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{\left(\frac{b_1}{k_1}s+1\right)\left(\frac{b_2}{k_2}s+1\right)}{\left(\frac{b_1}{k_1}s+1\right)\left(\frac{b_2}{k_2}s+1\right)+\frac{b_2}{k_1}s}$$

Substituindo os valores dos parâmetros, resulta

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{\left(s+1\right)\left(2s+1\right)}{\left(s+1\right)\left(2s+1\right)+4s} = \frac{s^2+1,5s+0,5}{s^2+3,5s+0,5}$$

A resposta do sistema virá

$$X_o\left(s\right) = \frac{s^2+1,5s+0,5}{s^2+3,5s+0,5}\times\frac{X_i}{s} = \left(\frac{0,6247}{s+3,3508}-\frac{0,6247}{s+0,1492}+\frac{1}{s}\right)X_i$$

$$x_o(t) = (0,6247e^{-3,3508t}-0,6247e^{-0,1492t}+1)X_i, \quad \text{notar que } x_o(0^+) = X_i$$