



TÉCNICO
LISBOA

**Determinação do preço de opções reais utilizando
um algoritmo genético híbrido**

José Frederico Silva Oliveira

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em

Engenharia e Gestão Industrial

Júri

Presidente: Prof. Francisco Miguel Garcia Gonçalves de Lima

Orientador: Prof. José Rui de Matos Figueira

Vogal: Prof^a. Maria Isabel Craveiro Pedro

Maio 2016

Agradecimentos

Quero agradecer ao professor José Rui Figueira, o meu orientador, por toda a disponibilidade, atenção e presença constante e sempre receptiva de todos e quaisquer assuntos e problemas que foram surgindo durante os meses de produção desta investigação, e que foi fundamental à condução bem-sucedida do projeto que é aqui apresentado.

Envio os meus mais sinceros agradecimentos também às professoras Isabel Rodrigues e Cláudia Nunes Philippart, pela prestação de esclarecimentos muito úteis à fundamentação deste tema.

Manifesto a minha gratidão à professora Isabel Pedro e ao professor Francisco Lima pelas críticas construtivas aquando da terminação deste projeto.

Por fim, estendo os meus agradecimentos à minha família e amigos por todo o apoio incondicional durante o desenvolvimento deste trabalho.

Abstract

This thesis proposes the implementation of a hybrid genetic algorithm that aims to produce random mathematic expressions for the pricing of real options. The training datasets were historic daily stock close prices and related parameters and the parameters derived from two usual option pricing models – the Black-Scholes model and the GARCH (1,1) model (Generalized Auto-Regressive Conditional Heteroscedasticity) – hence the algorithm being a hybrid. These two models were also used as benchmark models to compare the ability of the hybrid genetic algorithm to yield option values closer to the real ones. Tests made to this algorithm allowed to conclude that it is able to return closed mathematical expressions that can yield option prices that are up to 14% closer to real values than the prices determined by the Black-Scholes equation or the GARCH (1,1) model.

Keywords: hybrid genetic algorithm, option pricing, GARCH (1,1), Black-Scholes model, non-parametrized option pricing methods, metaheuristic.

Resumo

Esta dissertação propõe a implementação de um algoritmo genético híbrido para a obtenção de expressões para o cálculo do valor de opções. Como conjunto de dados de treino foram utilizados os valores históricos diários de ações financeiras reais, os parâmetros determinados a partir deles e os parâmetros dos modelos estocásticos mais vulgarmente utilizados no cálculo do preço de opções de ações – a Equação de Black-Scholes e o modelo GARCH (1,1) (*Generalized Auto-Regressive Conditional Heteroscedasticity*). Os valores das opções determinados por estes modelos também foram utilizados como termos de comparação da capacidade do algoritmo genético híbrido para encontrar valores mais próximos dos reais. Testes realizados a este algoritmo permitiram verificar que este método está apto a construir expressões matemáticas que permitem obter resultados até 14% mais próximos dos reais que os dois métodos estocásticos a que foi comparado.

Palavras-chave:

Algoritmo genético híbrido, preço de opções financeiras, Modelo GARCH (1,1), Equação de Black-Scholes, modelo de preços de ativos não parametrizados, métodos metaheurísticos.

Índice

Introdução.....	1
1 Métodos utilizados na determinação do preço de opções	7
1.1 Equação de Black-Scholes.....	11
1.2 O modelo GARCH	12
1.3 Revisão de bibliografia recente	14
2 Algoritmo genético	20
2.1 Elementos de um algoritmo genético	20
2.2 Estrutura de um algoritmo genético.....	25
2.3 Os indivíduos e a geração da população inicial	28
2.4 Operações genéticas.....	28
2.5 Critérios de seleção e medidas de desempenho	30
2.6 Critério de terminação e designação do resultado	31
2.7 Parâmetros de controlo	31
3 Implementação do algoritmo genético híbrido e resultados.....	33
3.1 Linguagem de programação e características do sistema.....	33
3.2 Bases de dados e informação financeira	33
3.3 Determinação dos parâmetros fundamentais	35
3.4 Implementação da equação de Black-Scholes	36
3.5 Implementação do modelo GARCH (1, 1).....	36
3.6 Construção do algoritmo genético híbrido.....	37
3.6.1 Medida de desempenho e a classificação dos indivíduos genéticos.....	38
3.6.2 Os indivíduos e as populações do algoritmo genético híbrido.....	39
3.6.3 Função de geração da população inicial aleatória	39
3.6.4 Função do algoritmo genético	41
3.7 Resultados da implementação do algoritmo genético híbrido	43
4 Conclusões	49
Bibliografia.....	51
Anexo 1. Dedução da equação de Black-Scholes	54

Anexo 2. Os gregos	66
Anexo 3. O modelo GARCH (m, s).....	68
Anexo 4. Exemplo de código introduzido no 	71
Anexo 5. Exemplo de uma janela do 	72

Índice de figuras

Figura 1: esquematização dos nodos de uma árvore binomial para determinação do preço futuro de uma ação (Cox, Ross, & Rubinstein, Option pricing: a simplified approach, 1979).	9
Figura 2.1: Exemplo de uma árvore binária em programação genética. Esta árvore é uma representação simplificada da equação de Black-Scholes para uma opção de compra (os nós com $d1$ e $d2$ seriam eles próprios sub-árvores; a árvore completa apresentaria 12 níveis de nós): $W = S\Phi d1 - Ke - rT * \Phi d2$	21
Figura 2.2: Esquema simplificado do funcionamento de um algoritmo genético.	27
Figura 2.3: esquema de uma mutação de um gene individual.	29
Figura 2.4: esquema de uma mutação de um segmento de genes.	29
Figura 2.5: esquema da realização de uma translocação. Os dois pais (vectores superiores) cruzam dois segmentos aleatórios dos seus genes, originando os dois filhos.	30
Figura 3.1: Evolução do preço de fecho das ações da AmGen entre 7 de setembro de 1984 e 18 de março de 2016, cotadas na Nasdaq (fonte: YFinance at http://finance.yahoo.com/ , através da API Quandl).	34
Figura 3.2: evolução da taxa de juro. Gráfico obtido a partir dos valores diários da taxa de juro da Reserva Federal Americana (Board of Governors of the Federal Reserve System, 2016).	34
Figura 3.3: estrutura de um conjunto de dados de treino.	35
Figura 3.4: evolução dos preços das opções determinados sobre as ações da AmGen segundo a equação de Black-Scholes (a vermelho) e o modelo GARCH (1, 1) (a azul), comparados ao valor real (a preto). As linhas do gráfico correspondem a uma aproximação suavizada dos valores determinados, que apresentam muito ruído.	37
Figura 3.5: fluxograma da implementação do algoritmo genético híbrido. As caixas de contorno cinzento são funções do AG, as com contorno negro são resultados; as setas curvas representam fluxo de informação e as retas indicam que funções são utilizadas por que outras funções.	38
Figura 3.6: evolução do preço das opções de compra das ações da AmGen, do seu valor real (azul) e do seu valor calculado através da equação de Black-Scholes (laranja), do modelo GARCH (1, 1) (verde) e do algoritmo genético híbrido (vermelho).	44
Figura 3.7: variação do valor de desempenho do melhor indivíduo gerado pelo AG híbrido em função da quantidade de indivíduos gerados durante a simulação.	45
Figura 3.8: variação do tempo de processamento em função do número total de indivíduos gerados pelo algoritmo genético híbrido.	45
Figura 3.9: evolução do preço das opções de compra das ações da Apple, do seu valor real (azul) e do seu valor calculado através da equação de Black-Scholes (laranja), do modelo GARCH (1, 1) (verde) e do algoritmo genético híbrido (vermelho).	46

Índice de tabelas

Tabela 1.1: classificação dos principais modelos de determinação do preço de opções.	7
Tabela 2.1: parâmetros e constantes utilizados nas expressões	24
Tabela 2.2: operações e funções possíveis de implementar na codificação de uma função para cálculo do preço de opções (os símbolos utilizados para definir as operações e funções são os utilizados pelo R).	25
Tabela 3.1: codificação numérica dos parâmetros, funções e operações matemáticas e outros elementos utilizados na construção das expressões dos indivíduos do algoritmo genético híbrido. ...	40
Tabela 3.2: aplicação e resultado devolvido pela função de geração da população inicial aleatória.	41
Tabela 3.3: aplicação e resultado devolvido pela função de aplicação do algoritmo genético híbrido.	42
Tabela 3.4: resultados da aplicação do AGh para diversas ações.	47
Tabela 4.1: os gregos para o caso das opções do tipo europeu.	66

Introdução

A determinação do preço de derivativos financeiros ganhou novas abordagens e limites revolucionários com o aumento do poder computacional, com a sua disponibilidade e a facilidade ao seu acesso. Modelos parametrizados e aproximados, segundo pressupostos que muitas vezes não se verificam na realidade, estão a tornar-se obsoletos face às ferramentas computacionais mais recentes. O comportamento futuro do valor das ações financeiras, nunca podendo ser conhecido, pode apenas ser previsto. Consequentemente, o trabalho de determinar um preço próximo do que seria atribuído caso se se tivesse conhecimento total a derivativos financeiros, como as opções de venda e de compra, na altura de definir esses contratos, é executado incorporando nos métodos mais utilizados muitos pressupostos e aproximações que, não se verificando na realidade, são fundamentais para, com consistência e num espaço de tempo curto, encontrar um valor aceitável próximo.

Por definição, as opções são contratos que dão a opção a quem as possui de exercer o direito, mas não o dever, de vender ou comprar o ativo subjacente num dado prazo. Uma opção é um derivativo financeiro na medida em que o seu valor é determinado através dos fluxos monetários (quer sejam remunerações periódicas, como dividendos, ou o valor de reembolso) de um instrumento financeiro. Os ativos subjacentes de uma opção poderão ser: ações, valores de moeda, taxas de juro, índices ou *commodities*.

No contrato de uma opção está estabelecido o valor pelo qual será realizada a troca do ativo subjacente – o preço do exercício – e, se for uma opção do estilo europeu, a data na qual a opção pode ser exercida – a data de maturidade (uma opção do estilo americano pode ser exercida em qualquer momento até à sua maturidade).

O valor intrínseco de uma opção num dado instante pode ser simplesmente visto como a diferença entre o preço do ativo subjacente e o preço de exercício da opção. Se o preço do exercício de uma opção de compra estiver abaixo do preço de mercado do ativo subjacente então a opção de compra estará *in-the-money*. Paralelamente, o mesmo se verificará para uma opção de venda se o seu preço de exercício estiver acima do preço de mercado do ativo. Ou seja, a opção terá um valor positivo. Pelo contrário, se o valor intrínseco da opção for negativo, diz-se que a opção está *out-of-the-money*. Contudo, dependendo do valor do prémio pago pelo comprador da opção, o seu valor intrínseco pode não compensar o prémio e assim, ser nulo ou negativo o valor temporal da opção.

O valor de uma opção depende pois do comportamento do ativo subjacente no mercado. O valor da opção dependerá dos seguintes fatores (cuja nomenclatura será a seguinte):

Preço do ativo subjacente (ação)	S	
Preço de exercício da opção	K	
Taxa de juro sem risco (teórica)	r	
Volatilidade	σ	(a variância será σ^2)
Maturidade	T	(tempo restante até à maturidade: $T^* = T - t$)
Dividendos	D	

Apesar de, no mundo financeiro atual, as opções serem alvo de uma utilização muito semelhante à dos próprios ativos financeiros, podendo ser trocadas, compradas e vendidas como normais ações, as opções foram criadas como ferramentas do mecanismo para reduzir o risco da comercialização de bens. No caso de opções sobre equidades, o ativo é uma ação ou produto similar comercializado numa bolsa. Uma opção, como contrato, é muito específica: tem definido o preço de exercício (o valor do ativo quando o contrato de compra ou venda do ativo é exercido) e uma data de validade do contrato (ou maturidade), até à qual pode ser exercida a opção, no caso das opções do estilo americano, ou na qual a opção pode ser exercida, no caso das opções do estilo europeu.

As possibilidades auferidas pelas opções torna-as um produto atrativo para, juntamente com a compra e venda de ações, aumentar o leque de possibilidades dos investidores e, principalmente, adaptar o seu estilo de investimento de acordo com a sua propensão ao risco. Dentro das possibilidades que as opções oferecem, o que as torna o principal objeto da engenharia financeira será talvez a possibilidade de comercializar ativos financeiros com obtenção de lucro independentemente da tendência do mercado.

Contudo, comercializar opções, como contratos futuros que são, desconhecendo-se as flutuações do mercado, desconhecendo-se qual será a evolução do preço dos ativos subjacentes ao contrato estipulado nas opções, desconhecendo-se a evolução das taxas de juro ou mesmo as tendências dos outros investidores, tem uma dificuldade inerente facilmente compreensível. O principal desafio que surge do estabelecimento de derivativos como objetos comerciáveis é como atribuir-lhes um preço de acordo com o seu valor real. Sendo as opções dependentes do comportamento do produto financeiro a elas vinculado, e sendo impossível conhecer qual será o comportamento desse produto financeiro no futuro, é pois apenas possível atribuir um preço às opções de acordo com o comportamento do ativo subjacente, do comportamento do mercado, ou do comportamento que se pensa que terá no futuro, e do valor que o ativo terá para a entidade investidora.

Os métodos para atribuir um preço adequado e rigorosamente justificado a opções começaram a surgir no início do século XX. Em 1900, Louis Bachelier publicou a sua tese de doutoramento marcando o dealbar da teoria da determinação do preço de opções. O seu trabalho, para além de ter sido dedicado a opções e à sua valorização, foi a primeira publicação de uma teoria matemática sobre processos estocásticos em tempo contínuo, os processos Wiener, também conhecidos como movimentos brownianos.

Um pouco mais tarde que Bachelier, em 1908, Vinzenz Bronzin publicou uma perspetiva dos métodos de determinação do preço de opções bem diferente do trabalho com fortes bases estatísticas de Bachelier. Bronzin desenvolveu a sua teoria em torno de premissas mais pragmáticas e dando importância a fatores como a arbitragem (a prática de tomar partido da diferença de preços entre dois ou mais mercados, combinando transações de modo a capitalizar lucro) ou a tendência dos investidores.

A recetividade e visibilidade destes dois trabalhos nos anos que se lhes seguiram não foi elevada, permanecendo bastante desconhecidos até à data da publicação do artigo que veio a revolucionar a teoria da valorização de opções. Em 1973, Fischer Black e Myron Scholes publicaram a que ficou conhecida como equação de Black-Scholes (ver Black & Scholes, 1973). O princípio desta fórmula

para a valorização de opções é desta forma descrito no resumo do seu artigo: “se as opções forem corretamente valorizadas no mercado, não deverá ser possível obter lucros certos criando portfólios de posições longas e curtas com opções e os seus ativos subjacentes”.

Contudo, os métodos estocásticos, como a equação de Black-Scholes, apresentam diversas lacunas quando dedicados a opções reais. Fundamentalmente, os métodos de valorização de opções baseados na teoria do risco nulo dependem de pressupostos que não se verificam no mundo real.

Outro nome que também desempenhou um papel preponderante na evolução dos métodos de valorização de opções foi Robert C. Merton, galardoado com o prémio Nobel da Economia juntamente com Myron Scholes pelo seu trabalho na valorização de opções em 1997. Além de ter proposto uma alteração à equação de Black-Scholes para abranger opções de ações com dividendos, também contribuiu com outras propostas para melhorar o desempenho dos métodos estocásticos. Por exemplo, uma das mais debatidas questões relativamente à equação de Black-Scholes e aos seus desvios face ao comportamento das opções reais é o facto de admitir uma distribuição normal, com média 0 e desvio padrão 1, para o retorno das ações. Merton, 1976, e Ball & Torous, 1985, propuseram atribuir ao retorno das ações o comportamento de um processo de Poisson, um processo estocástico descontínuo cuja função de distribuição tem saltos com uma probabilidade definida (ver Merton, 1976).

Outros métodos estocásticos vulgarmente utilizados na estimação do preço de opções, mas que se diferenciam metodologicamente dos acima mencionados por necessitarem, em certo ponto da sua implementação, a aplicação da simulação de Monte-Carlo, são os modelos autorregressivos. Estes modelos baseiam-se na análise da volatilidade estocástica, partindo do princípio de que a volatilidade varia ao longo do tempo, refletindo períodos de variações acentuadas seguidos de períodos de relativa calma. Estes modelos, dos quais a forma mais simples será o modelo ARMA (*Auto-Regressive Moving Average*), são particularmente úteis na descrição do comportamento de produtos financeiros. Modelando o aparecimento de concentrações de observações com volatilidades mais elevadas que decaem posteriormente com o tempo, mimetizam, de certa maneira, os períodos que antecedem o lançamento das cotações dos mercados financeiros.

Com o objetivo de modelar a incerteza, crescente com o tempo, dos mercados financeiros, a introdução do conceito da heteroscedasticidade da volatilidade nos modelos ARMA é útil para melhorar o seu desempenho. Os modelos GARCH (*Generalized Auto-Regressive Conditional Heteroscedasticity*) são o resultado de tal aperfeiçoamento, mostrando-se tão bem ou melhor adaptados à tarefa de extrapolar preços, próximos dos que se fariam com conhecimento completo do futuro comportamento dos mercados, como os modelos derivados da análise de processos estocásticos como a equação de Black-Scholes ou o modelo Heston.

O modelo Heston (Heston, 1993), no qual o processo de atribuir aleatoriedade à variância varia com a raiz quadrada da variância, encontra-se entre a classe de modelos que consideram uma volatilidade estocástica. Outros exemplos deste tipo de modelos são, por exemplo o modelo CEV (*Constant Elasticity of Volatility*), que considera a variação da variância com o preço dos ativos subjacentes (por exemplo, dependendo dos mercados, a volatilidade pode aumentar com o aumento dos preços) e o modelo SABR (*Stochastic Alpha Beta Rho*) que, tentando capturar o fenómeno

conhecido como sorriso da volatilidade, introduz parâmetros baseados na descrição de um contrato índice *forward*.

A grande vantagem dos modelos estocásticos é o facto de providenciarem fórmulas fechadas, com um número limite de operações, para determinar o valor de opções introduzindo um número limitado e usável de parâmetros. No entanto, a definição destes modelos pode ser complicada e pouco fiável se as observações estocásticas tiverem um comportamento muito afastado dos limites assumidos na sua dedução (como vulgarmente acontece no caso da equação de Black-Scholes).

É da dificuldade para encontrar soluções analíticas com métodos paramétricos que surge a necessidade de implementar métodos não-paramétricos. A utilização de árvores binomiais recombinadas e inferidas segundo o princípio do risco nulo, a partir de observações de dados passados, pode ser uma forma de obter os valores de opções de acordo com as probabilidades observadas (ver Rubinstein, 1994). O modelo das árvores binomiais assume que o preço das ações tem um movimento discreto com saltos de magnitude conhecida, ao contrário do modelo de Black-Scholes, que assume um processo contínuo com volatilidade constante.

Apesar de modificações e de incrementos poderem ser feitos aos métodos estocásticos, nomeadamente aos baseados no modelo Black-Scholes, para melhorar a sua prestação, estas tentativas ficam aquém do que tem vindo a ser possível, utilizando métodos mais recentemente desenvolvidos, como os algoritmos metaheurísticos ou os métodos que incorporam várias características de vários modelos estocásticos ou de outra forma parametrizados. A modelação de processos estocásticos com características de movimentos brownianos é estrita e limitada por parâmetros. Eventos raros como quedas drásticas de mercados de ações são muito mais frequentes do que é esperado por distribuições gaussianas. A existência de tais eventos é um obstáculo severo às tentativas de criação de estratégias de compensação (*hedging*). Estes modelos consideram a evolução dos preços como o resultado de passos aleatórios com um tamanho finito que se conjugam no estabelecimento de uma progressão aleatória gaussiana.

A utilização de algoritmos para determinar o preço de opções surge como uma resposta resultante da sua capacidade para resolver problemas complexos com características multivariadas. Na engenharia financeira, os métodos analíticos utilizados para a realização de investimentos, criação de portefólios ou estabelecimento de taxas de juro têm vindo a ser implementados partindo do princípio de que a evolução de taxas de juro, e o seu valor em determinados pontos no futuro, as predições da inflação ou mesmo a antecipação da ocorrência de acontecimentos determinantes dos ciclos de negócios dos ativos cotados em bolsas, podem ser inferidos a partir dos preços presentes dos ativos e do seu comportamento passado. A eficácia destes métodos para aplicar estas inferências depende de quatro fatores: um modelo satisfatório que relaciona os preços com a informação necessária inferida; um modelo que possa ser implementado com recursos de baixo custo e em tempo útil; que os dados utilizados pelo método tenham sido obtidos e imputados corretamente; e da eficiente gestão dos mercados. Os métodos metaheurísticos ultrapassam esta dependência.

Recorrer à utilização de algoritmos metaheurísticos para modelar o comportamento de sistemas complexos é uma forma de contornar a necessidade, inerente a essa complexidade, de assumir

limites, aproximações ou estimações de parâmetros, criando a possibilidade de desenvolver para cada sistema um modelo próprio e apropriado.

No caso da produção de uma expressão para determinar o preço de opções para cada ação, quantas menos suposições forem feitas para explicar o seu comportamento ao longo do tempo, mais liberdade é dada aos métodos não paramétricos para construir uma função estimada mais adequada ao conjunto de dados sobre análise. No limite da aplicação dos métodos não paramétricos, do tipo dos algoritmos metaheurísticos aqui referidos, os parâmetros, índices ou funções devolvidas na expressão final serão aqueles que são suficientes e ótimos para encontrar um valor final mais aproximado. Consequentemente, a lei da parcimónia será um dos princípios observados na busca por uma solução através de algoritmos metaheurísticos.

Os dois métodos metaheurísticos vulgarmente referidos ao problema de estimação do preço de opções, ou pelo menos os que permitem obter melhores resultados na capacidade para abordar problemas estocásticos deste tipo, são as redes neuronais artificiais e os algoritmos genéticos.

A utilização de algoritmos de redes neuronais artificiais em aplicações financeiras, em particular os do tipo de propagação retroativa dos erros, é cada vez mais vulgar. Estes algoritmos baseiam-se em princípios semelhantes ao funcionamento dos neurónios: a informação entra no sistema, é processada em nodos de cálculo analítico, os neurónios, e o resultado é então determinado; por comparação ao conjunto de dados de treino, são calculados os erros entre o resultado determinado pela rede de nodos e os valores conhecidos e o peso das operações de cada nodo é atualizado retroativamente, favorecendo aqueles que realizam as operações mais vantajosas. Apesar deste tipo de algoritmos necessitar geralmente de um tempo de treino elevado e de grandes conjuntos de dados, com um grande número de observações, para produzir bons resultados, a sua versatilidade é muito benéfica, sendo capaz de produzir resultados para qualquer tipo de informação se os parâmetros imputados forem suficientes.

A programação genética tem como objetivo mimetizar o processo estocástico através do qual as características genéticas individuais são transmitidas ao longo da descendência a partir da combinação ou mutação dos genes dos progenitores. Os algoritmos genéticos funcionam, em traços gerais, criando inicialmente uma população de indivíduos capazes de resolver determinado problema. Os indivíduos são codificados nesse sentido por genes, características genéticas, que constituem a identidade de cada um, e que são as unidades utilizadas para a resolução do problema sobre análise. A capacidade de cada indivíduo para encontrar uma solução é mensurável, dada por um valor numérico de quão aproximada é essa solução a um valor conhecido de teste. Esta medida de desempenho é utilizada para classificar cada indivíduo e determinar a sua posição relativamente aos outros indivíduos da população. Os melhores indivíduos são os que terão maior probabilidade de passar as suas características, os seus genes, e são aqueles preferencialmente escolhidos para gerar descendência, indivíduos filhos gerados por mutações, translocações ou simples reproduções dos progenitores. Após gerações suficientes deverá existir um indivíduo colocado no topo da população que é melhor do que os outros a fornecer uma solução, e o algoritmo é terminado.

Os algoritmos genéticos, neste caso do tratamento de dados de processos estocásticos, auferem de vantagens relativamente às redes neuronais. Além de, computacionalmente, fornecerem em geral

melhores resultados para a atribuição de preços a opções, a principal será talvez o facto de necessitarem de conjunto de dados de aprendizagem menores. Outra vantagem será a de ser possível a introdução forçada na população inicial de expressões analíticas que já são uma boa aproximação, como a equação de Black-Scholes, introduzindo à partida bons genes na população.

Aplicar algoritmos genéticos para determinar o preço de opções ganha outro interesse por ser relativamente fácil desenvolver híbridos com outros modelos. Neste caso, foi analisada a capacidade do algoritmo genético para utilizar e incorporar na solução elementos da equação de Black-Scholes e do modelo GARCH de primeira ordem para mais facilmente encontrar soluções boas.

O plano do resto deste trabalho segue da seguinte maneira. Começamos por introduzir os métodos utilizados para determinar o preço das opções no capítulo 1, descrevendo os dois modelos mais comuns, que serão a base de comparação do funcionamento do algoritmo genético híbrido, e fazendo uma breve compilação dos métodos teóricos desenvolvidos mais recentemente. O capítulo 2 descreve um algoritmo genético geral, no que consiste, quais são os seus elementos e como está estruturado. A implementação do algoritmo genético híbrido está estratificada no capítulo 3. Começando pela documentação relativa ao *software* utilizado e à origem dos dados, é depois descrito o tratamento da série temporal dos dados de treino, seguido da implementação da equação de Black-Scholes e do modelo GARCH (1,1). A construção e aplicação do algoritmo genético híbrido é finalmente seguida da exposição de alguns resultados exemplificativos. O capítulo 4 conclui com algumas generalizações sobre o funcionamento do algoritmo genético e a referência aos possíveis desenvolvimentos deste modelo.

1 Métodos utilizados na determinação do preço de opções

Existem diversos métodos para a determinação do valor e, por inferência, do preço de uma opção. Estes métodos podem ser classificados em duas classes – métodos paramétricos e métodos não paramétricos. Da primeira fazem parte os métodos estocásticos que, dependendo das aproximações e pressupostos feitos para se poder alcançar uma fórmula final que permita calcular imediatamente um valor para a opção, escolhemos dividi-los essencialmente em dois grupos distintos, assumindo a constância da volatilidade da ação subjacente. O grupo dos modelos não paramétricos é constituído pelos algoritmos metaheurísticos. A Tabela 1.1 resume, os modelos mais utilizados na valorização de opções. Estes são essencialmente os modelos de referência; muitos dos modelos atualmente desenvolvidos ou têm neles as suas bases ou são uma combinação destes.

A utilização de um ou outro tipo de modelo depende das respetivas vantagens de que se pretende usufruir e das desvantagens que é necessário evitar, depende do compromisso escolhido e das capacidades que se possui.

Naturalmente que a utilização de algoritmos metaheurísticos permitirá obter valores mais aproximados para opções reais, mas não sem aumentar o custo da necessidade de disponibilizar maior poder computacional e de armazenamento de dados, do acesso a maiores conjuntos de dados de treino e do emprego de modelos mais complexos. Contrariamente às elevadas necessidades computacionais destes métodos, a modelação do comportamento dos ativos utilizando modelos estocásticos e de equações estocásticas que produzam soluções únicas com a introdução de parâmetros limitados, é mais fácil e imediata, ficando comprometida a veracidade dos preços de opções assim obtidos.

Tabela 1.1: classificação dos principais modelos de determinação do preço de opções.

Modelos para a determinação do preço de opções		
Modelos baseados na parametrização da volatilidade	Volatilidade constante	Black-Scholes
		Elasticidade constante da variância (CEV)
		Merton
		Vašíček
		Árvores binomiais
		Difusão deslocada de Rubinstein
		Cox-Ingersoll-Ross
	Hull-White	
	Volatilidade estocástica	Heston
GARCH - ARMA		
Modelos não paramétricos (algoritmos metaheurísticos)	Algoritmos genéticos	
	Redes neuronais (v. Gradojevic, et al, 2009)	

Neste trabalho optou-se por focar dois métodos estocásticos: um considerando a volatilidade constante – a equação de Black-Scholes –, a qual é vulgarmente utilizada como base de comparação

para comparação com outros métodos, e outro considerando a volatilidade aproximada a um processo estocástico variável no tempo – o modelo generalizado de heteroscedasticidade condicional autorregressiva (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity* [GARCH]). O método metaheurístico não paramétrico para a determinação do preço de opções através de um algoritmo genético híbrido para geração de fórmulas de cálculo do valor de opções é o objeto deste trabalho.

O modelo de Black-Scholes e o modelo GARCH serão descritos em pormenor nos capítulos 1.1 e 1.2 respetivamente. De seguida resume-se muito brevemente os restantes métodos mencionados na Tabela 1.1 e que lançaram os alicerces dos métodos para a análise dos processos estocásticos de difusão do valor das ações.

Para introduzir estes métodos é necessário apresentar alguns conceitos básicos, começando pelos princípios dos movimentos Brownianos inicialmente incorporados na análise de ativos financeiros no modelo de Black-Scholes.

A equação de Black-Scholes é derivada partindo do princípio de que o preço de uma ação ao longo do tempo (S_t) segue um processo de difusão de um movimento Browniano (Black & Scholes, 1973). Este é um processo de Ito, descrito segundo a seguinte equação diferencial estocástica:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma d\omega_t \quad \text{Equação 1.1}$$

Onde μ é o valor médio do rendimento das ações, σ é a volatilidade do preço das ações (geralmente determinada no ano anterior ao instante considerado) e ω_t é um processo de Wiener.

Um processo de Wiener descreve um movimento Browniano caracterizado por ser contínuo no tempo, com incrementos independentes gaussianos normalmente distribuídos e com média 0. Pode ser descrito segundo uma série de Fourier:

$$\omega_n(t) = \xi_0 t + \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \frac{\text{sen}(\pi n t)}{\pi n} \quad \text{Equação 1.2}$$

Onde $\{\xi_n\}$ é uma série de variáveis iid normalmente distribuídas com média 0 e variância 1.

Modelo de variância com elasticidade constante

Este modelo foi proposto como uma alteração à equação diferencial estocástica introduzida anteriormente por John Cox em 1975.

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t^\gamma d\omega_t \quad \text{Equação 1.3}$$

Onde o expoente γ controla a relação entre a volatilidade e o valor da ação.

Modelo Merton de difusão com saltos

O modelo de Merton de difusão de saltos (Merton, 1976) acrescenta um termo discreto com o objetivo de descrever os saltos não esperados no preço das ações. A equação de difusão deste modelo toma então a forma:

$$\frac{dS_t}{S_t} = (\mu - \lambda k) dt + \sigma d\omega_t + dq \quad \text{Equação 1.4}$$

Onde λ é o número médio de eventos (os saltos) por unidade de tempo, $k \equiv \varepsilon(Y - 1)$, sendo $(Y - 1)$ a variação aleatória percentual do preço da ação caso o salto ocorra. ε é um operador de probabilidade sobre a variável aleatória Y .

De outra forma, esta equação pode ser escrita assim:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma d\omega_t + d \left[\sum_{i=1}^{q_t} (J_i - 1) \right] \quad \text{Equação 1.5}$$

Em que q_t é um processo de Poisson, ω_t é um processo de Wiener (ou movimento browniano estandardizado) e $\{J_i\}$ é uma série de variáveis iid, não negativas, em que $X = \ln(J)$ segue uma distribuição dupla exponencial (ou distribuição de Laplace).

Modelo Vašíček

Este modelo foi criado com o objetivo de modelar a taxa de câmbio à vista (*spot rate*), r_t ; comparável à taxa de juro sem risco (Vašíček, 1977). A equação diferencial em que se baseia este modelo é a seguinte:

$$dr_t = \alpha(\gamma - r_t) dt + \sigma d\omega_t \quad \text{Equação 1.6}$$

Onde o parâmetro α se refere a uma medida de velocidade de reversão dos valores de r_t em torno do valor médio, γ . Este foi, assim, o primeiro modelo a considerar um tipo de inércia do valor de um ativo em torno de um valor médio.

Árvores Binomiais

O modelo inicialmente desenvolvido por Cox, Ross e Rubinstein (Cox, Ross, & Rubinstein, Option pricing: a simplified approach, 1979) apresentou uma forma de representar discretamente a evolução do preço de opções. De uma forma simplista, tem como base de que a cada instante, o valor de uma ação só pode ter dois resultados possíveis com uma probabilidade definida (p). A Figura 1 ilustra este processo.

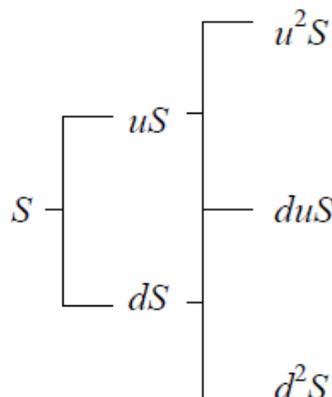


Figura 1: esquematização dos nodos de uma árvore binomial para determinação do preço futuro de uma ação (Cox, Ross, & Rubinstein, Option pricing: a simplified approach, 1979).

$$p = \frac{r - d}{u - d}, \quad u = e^{\sigma\sqrt{t}}, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{t}} \quad \text{Equação 1.7}$$

Modelo de difusão deslocada de Rubinstein

O modelo proposto por Rubinstein, em 1983, é uma generalização da equação de Black-Scholes. Este modelo divide os ativos de um portfólio entre ativos sem risco e ativos com risco, e deriva uma fórmula cujos parâmetros caracterizam um portfólio sem risco, incluindo a possibilidade de o portfólio auferir dividendos e de existir dívida.

A expressão analítica derivada deste modelo para obter o valor de uma opção de compra é a seguinte:

$$C = aS\Phi(x) - (K - bS)r^{-T^*}\Phi(x - \sigma\sqrt{T^*})$$

$$x = \frac{\ln[(aS)/(K - bS)r^{-T^*}]}{\sigma\sqrt{T^*}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T^*}$$

$$a = \alpha(1 + \beta) \prod_{k \leq T} (1 - \delta_k)$$

$$b = (1 - \alpha - \alpha\beta)r^{-T^*} - \sum_{k \leq T} (d_k r^{T-k})$$

Equação 1.8

Onde T é a maturidade (T^* é o tempo restante até à maturidade), α é a percentagem do portfólio investido em ações com risco ($1 - \alpha$ é a percentagem do portfólio investido em opções, os ativos sem risco), β é dívida sobre os ativos adquiridos, d_k é a fração sobre o preço da ação pago sobre a forma de dividendos no período k (b será, portanto, a fração sobre o valor do portfólio pago sobre a forma de dividendos).

Modelo CIR (Cox-Ingersoll-Ross)

O modelo proposto por Cox, Ingersoll, & Ross, em 1985, é uma generalização do modelo de Vašíček.

$$dr_t = \alpha(\gamma - r_t) dt + \sigma\sqrt{r_t} d\omega_t \quad \text{Equação 1.9}$$

Modelo Hull-White

Hull & White, em 1990, propuseram uma extensão do modelo de Vašíček e do modelo CIR, introduzindo uma função dependente do tempo $\theta(t)$ para incorporar a modelação da deriva imprevista dos valores de r_t .

$$dr_t = [\theta(t) + \alpha(\gamma - r_t)] dt + \sigma r_t^\beta d\omega_t \quad \text{Equação 1.10}$$

Onde o parâmetro α se refere a uma medida de velocidade de reversão dos valores de r_t em torno do valor médio, γ . O parâmetro β , que na forma derivada por Vašíček tem o valor 0, pode, segundo o admitido no modelo CIR, considerando que r_t nunca pode ser negativo, tomar o valor 0.5

Modelo Heston

Heston, em 1993, à equação diferencial estocástica já apresentada na Equação 1.1, introduziu a variância descrita por um processo estocástico. Ficamos assim com a equação diferencial estocástica do movimento Browniano para o valor da ação (Equação 1.11), complementada por uma segunda equação estocástica modeladora da variância (Equação 1.12).

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t d\omega_t \quad \text{Equação 1.11}$$

$$d\sigma^2 = k(\theta - \sigma_t^2) dt + \delta \sigma_t dz_t \quad \text{Equação 1.12}$$

Nesta equação diferencial estocástica da variância, θ é o valor médio da variância, k é um parâmetro indicador da velocidade com que o valor da variância reverte para θ , δ é a volatilidade da variância, e z_t é um processo de Wiener dedicado à variância (que, por definição, é diretamente correlacionado com o processo de Wiener ω_t do preço do ativo).

1.1 Equação de Black-Scholes

Como foi anteriormente referido, a equação de Black-Scholes foi revolucionária no estabelecimento de uma fórmula analítica para instantaneamente determinar o preço de opções utilizando unicamente os valores históricos do ativo subjacente, nomeadamente, se for considerada a volatilidade anualizada, apenas será necessário um ano de observações.

Na derivação da fórmula para determinação do valor de uma opção nos termos definidos pelo preço da ação, Fischer Black e Myron Scholes, em 1973, assumiram para o mercado de ações e de opções condições ideais:

- A taxa de juro sem risco a curto prazo é conhecida e constante no tempo;
- O preço da ação obedece a um processo de Wiener, um movimento browniano contínuo no tempo com variância proporcional ao quadrado do preço da ação, sendo a distribuição dos preços possíveis da ação no final de qualquer intervalo de tempo finito normal. A variância do valor da ação é constante;
- A ação não auferir dividendos (embora na derivação feita por Merton da equação de Black-Scholes seja introduzido facilmente um termo dedicado aos dividendos);
- A opção é do estilo europeu, o que significa que só pode ser exercida na data de maturidade;
- Não são considerados os custos de transação na compra ou na venda da opção ou da ação;
- É possível obter qualquer fração do preço da opção, para comprá-la ou tê-la, à taxa de juro considerada. Isto significa que as opções podem ser fracionadas, o número de opções compradas ou vendidas é contínuo e não discreto;
- A venda a descoberto de opções é possível e não é penalizada. Considera-se que um vendedor de opções que não possui recebe o prémio acordando com o comprador uma compensação posterior.

Desta forma, o preço da opção depende apenas do preço da ação subjacente, dos seus valores históricos, do tempo e de parâmetros conhecidos, contratuais e constantes.

A derivação da equação de Black-Scholes está pormenorizadamente descrita no Anexo 1. Resumidamente, a fórmula geral deste modelo é a seguinte:

$$W(S, t) = \varepsilon S \Phi(\varepsilon d_1) - \varepsilon K e^{-rT^*} \Phi(\varepsilon d_2), \quad \varepsilon = \begin{cases} 1, & \text{para uma opção de compra} \\ -1, & \text{para uma opção de venda} \end{cases}$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + T^*(r + \sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{T^*}} \quad \text{Equação 1.13}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/K) + T^*(r - \sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{T^*}} = d_1 - \sigma\sqrt{T^*}$$

O preço de uma opção (W) depende do preço de exercício da opção (K), do valor da ação subjacente (S), do tempo restante até à maturidade ($T^* = T - t$), em anos, da taxa de juro sem risco (r) e da volatilidade da ação (σ) considerada constante. O termo Ke^{-rT^*} não é mais que o valor atualizado do preço de exercício. Φ é a função de distribuição cumulativa da distribuição normal estandardizada. A incorporação dos dividendos (D) nesta fórmula, resultante da derivação de Merton, pode ser feita facilmente modificando o valor da ação: $S_0^* = S_0 e^{-DT}$.

A partir da equação de Black-Scholes podem ser obtidos termos que são úteis na estimação de variações no preço das opções com diversos fatores do mercado, sendo úteis indicadores utilizados na tomada de decisões de investimento. Denominados por letras gregas, estes termos estão também descritos no Anexo 2.

Por ser muito útil, relativamente precisa e fácil de implementar no caso de opções simples, sem dividendos ou com ativos subjacentes complexos, este foi um dos modelos utilizados para comparar a prestação do algoritmo genético híbrido.

1.2 O modelo GARCH

O modelo GARCH aplicado à engenharia financeira tem como principal objetivo descrever o comportamento da volatilidade de um ativo. A volatilidade é provavelmente o principal elemento a determinar quando se faz a análise de uma série temporal de valores, já que os restantes parâmetros são geralmente fornecidos pelas características do investidor e do mercado.

O modelo GARCH, mesmo adaptando um modelo de baixa ordem, é particularmente útil para descrever a volatilidade nestes casos. Quando se verifica empiricamente um aumento de volatilidade, o modelo GARCH desenvolve, quando utilizado para prever os valores futuros, um *cluster* de valores de volatilidade maiores que decrescem ao longo do tempo; algo que se observa na realidade dos mercados financeiros.

No Anexo 3 o desenvolvimento do modelo GARCH (m, s) é descrito em pormenor.

O logaritmo do rendimento no tempo t (r_t) pode ser definido como uma função da média (μ_t) e da inovação (a_t), ou choque: $r_t = \mu_t + a_t$.

A inovação segue um modelo GARCH (m, s) se:

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t \quad \text{Equação 1.14}$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad \text{Equação 1.15}$$

Onde σ_t é a volatilidade condicional, α e β são os parâmetros da volatilidade condicional, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i, \beta_j > 0$ e $\sum_{i=1}^{\max(m,s)} (\alpha_i + \beta_i) < 1$, para assegurar a condição de estabilidade e garantir que a volatilidade não é infinita. $\{\epsilon_t\}$ é uma série de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, geralmente segundo uma função de distribuição estandardizada, como a normal, a t-Student ou a função de erro generalizada.

A média pode ser definida, por exemplo, de uma forma geral, segundo um modelo ARMA (p, q):

$$\mu_t = \sum_{i=1}^p \phi_i r_{t-i} - \sum_{j=1}^q \theta_j a_{t-j} \quad \text{Equação 1.16}$$

Os valores dos parâmetros para a variância condicionada ($\alpha_i \forall i < m, \beta_j \forall j < s$) e da média ($\phi_i \forall i < p, \theta_j \forall j < q$) são determinados por regressão linear com os valores históricos. Uma das desvantagens de aplicar este método é o facto de esta tarefa poder tornar-se computacionalmente pesada para modelos de ordem mais elevada. É por isso vulgar encontrar aplicações deste modelo para p, q, m e s iguais a 0 ou 1.

Após determinados os parâmetros para a variância condicionada e para a média, o valor de uma opção pode ser determinado prevendo os valores futuros em torno dos valores esperados através de uma simulação Monte Carlo. Tem-se então para a maturidade ($t = T$):

$$r_T = \sum_{s=t+1}^T \mu_s + \sum_{s=t+1}^T a_s \quad \text{Equação 1.17}$$

E o valor da ação na maturidade (S_T) será dado por:

$$S_T = S_t \exp(r_T) \quad \text{Equação 1.18}$$

O valor da opção (W_t) é então determinado em função do valor futuro da ação, do preço de exercício e do tempo até à maturidade:

$$W_t = e^{-(T-t)} \max(\epsilon(S_T - K), 0) \quad , \quad \epsilon = \begin{cases} 1, & \text{para uma opção de compra} \\ -1, & \text{para uma opção de venda} \end{cases} \quad \text{Equação 1.19}$$

A Equação 1.15 é a aplicação mais simples e direta que existe da dinâmica GARCH na determinação do valor de ativos financeiros. A quantidade de propostas alternativas para descrever a volatilidade condicional ou o rendimento a partir do modelo GARCH é extensa, refletindo a quantidade de parâmetros e condições que podem ser inseridos na dinâmica da volatilidade heteroscedástica e os

vários objetivos que se pretendem concretizar com estes modelos. A título de exemplo mostram-se a dinâmica da variância condicional do modelo GARCH (1, 1) de Heston-Nandi na Equação 1.20 e o modelo NGARCH (1, 1) de Engle e Ng na Equação 1.21, onde w , a , b e c são os parâmetros da variância condicional e z_t é uma variável aleatória.

$$\sigma_t^2 = w + b \sigma_{t-1}^2 + a \left(z_{t-1} - c \sqrt{\sigma_{t-1}^2} \right)^2 \quad \text{Equação 1.20}$$

$$\sigma_t^2 = w + b \sigma_{t-1}^2 + a \sigma_{t-1}^2 (z_{t-1} - c)^2 \quad \text{Equação 1.21}$$

Não estando dentro do escopo deste trabalho a demonstração destes modelos, considera-se importante referir ainda que o modelo GARCH, quando definido introduzindo o conceito de risco nulo no cálculo do preço de opções, pela primeira vez proposto por (Duan, 1995), é particularmente útil para descrever a dependência do valor das opções da volatilidade condicionada. A título de curiosidade refere-se que o modelo GARCH (0, 0) de Duan equivale à equação de Black-Scholes. A grande diferença é que o modelo GARCH opera em mercados incompletos, ao contrário da equação de Black-Scholes que os considera aproximadamente completos, isto é, contínuos no tempo, e não um conjunto de observações descontínuas, como são na realidade descritos os mercados.

Apesar de ser um modelo de referência na matemática financeira, o modelo GARCH apresenta algumas fraquezas. Nomeadamente, uma das características deste modelo é responder a choques nos preços das ações da mesma forma quer sejam negativos ou positivos. Além disso, principalmente para dados obtidos de amostragens de séries financeiras temporais de elevada frequência, a comportamento das caudas da distribuição dos valores determinados através deste modelo mostra uma curtose muito baixa.

1.3 Revisão de bibliografia recente

Não obstante as potencialidades dos métodos computacionais totalmente isentos das limitações impostas por parametrizações, o caminho tomado pelos desenvolvimentos da teoria da determinação do preço de derivativos financeiros continua a ser traçado em torno de modelos que pretendem representar os aspetos teóricos da progressão estocástica dos valores dos ativos nos mercados financeiros.

O factor que recebe mais atenção no desenvolvimento destes modelos é a volatilidade. Representar as dinâmicas da volatilidade para acomodar todos os efeitos até hoje detetados, resultantes da análise dos processos estocásticos da dinâmica dos ativos, tentando encontrar um método robusto que possa ser aplicado a qualquer tipo de derivativo mantendo ou melhorando as boas aproximações já conseguidas é o principal desafio.

Desde a volatilidade multivariada, à introdução da modelação dos choques nos preços dos ativos financeiros e das alterações abruptas dos mercados (provocadas pela especulação, o rebentamento de bolhas financeiras ou mesmo desastres naturais), passando pela introdução de modelos auto-

regressivos e pela exploração de diversas distribuições probabilísticas, contínuas ou descontínuas, ajustadas às observações dos preços, são inúmeras as possibilidades da análise de processos estocásticos financeiros.

Antes de descrever sucintamente os trabalhos mais recentes que foram feitos na abordagem do tratamento da volatilidade, e da determinação do preço de opções, é talvez mais interessante referir algumas abordagens no pré-tratamento dos dados brutos dos preços dos ativos financeiros.

Appadoo & Thavaneswaran, 2013 propõem a modelação de opções reais difusas determinando o seu preço a partir do cálculo da volatilidade estocástica difusa, utilizando uma interpretação difusa (*fuzzy numbers*) dos preços do ativo subjacente; o primeiro passo deste modelo, antes de calcular o preço das opções utilizando, por exemplo, a equação de Black-Scholes, será a determinação dos parâmetros da função de pertinência dos valores difusos dos preços históricos das ações.

Um outro tratamento interessante dos valores históricos do ativo subjacente é feito por Andersen, et al, 2015. Estes autores, na sua análise multi-frequencista da volatilidade, atribuíram uma elevada importância ao ruído inerente aos valores de volatilidade determinados com elevada frequência, assim como à importância dos choques de volatilidade e da frequência com que ocorrem. Segundo este método, em primeiro lugar é feita a análise da atividade das ações por comparação de dados retirados em duas frequências diferentes; os dados são observados numa rede de amostragem, para atenuar o impacto do ruído devido à alta frequência de amostragem. Além disso, a modelação dos choques dos preços do ativo é feita segundo uma função de distribuição cumulativa empírica (que deverá ser gaussiana, caso seja um processo com difusão de choques [*jump-diffusion process*; como seria o processo admitido pela equação de Black-Scholes se a evolução dos preços fosse descontínua], ou uma função de distribuição estável, se for um processo de choques puro [evolução discreta dos valores, da qual a determinação do preço de opções utilizando árvores binomiais é um exemplo clássico]).

No que respeita à otimização da modelação da volatilidade, Asai & McAleer, 2015, assumem uma volatilidade estocástica assimétrica multivariada segundo um processo de difusão auto-regressivo de Wishart¹, capaz de acomodar efeitos retroativos e de alavancagem (*AMWSV, Asymmetric Multifactor Wishart Stochastic Volatility*). Os efeitos de alavancagem consistem na existência de uma correlação negativa entre os lucros presentes e os valores futuros de volatilidade; por outro lado, os efeitos retroativos refletem a correlação positiva entre a volatilidade corrente e os lucros futuros. Os modelos AMWSV, segundo estes autores, são estimados utilizando o método dos momentos generalizado, utilizando informação dos valores históricos das ações, das volatilidades observadas e co-volatilidades. A expressão fechada resultante da derivação da transformada de Laplace condicional deste modelo (ou não condicional), segundo limites de integração impostos pelo princípio do risco nulo, é utilizada para determinar o preço de derivativos financeiros.

Uma vertente com particular interesse da análise da distribuição dos preços dos ativos financeiros é a modelação dos eventos extremos, da fuga à normalidade, da probabilidade de o preço evoluir para valores mais afastados do valor esperado. Um processo baseado em movimentos brownianos pode estar sujeito a variâncias muito maiores do que as previstas segundo distribuições estáveis,

¹ a distribuição de Wishart é uma generalização da distribuição χ -quadrado.

como as distribuições gaussianas ou a distribuição de Cauchy, sendo antes melhor caracterizado por distribuições que permitam elevada curtose e elevada assimetria.

Por exemplo em Bollerslev & Todorov, 2014 são analisadas distribuições de rendimentos de ativos financeiros com curtose e assimetria mais elevadas que o normal em dados com grandes variações de preços. A modelação, a partir de aproximações segundo a teoria dos valores extremos (TVE), do risco do preço de uma ação cair nos extremos da distribuição dos seus valores, através da parametrização que caracteriza a forma das extremidades esquerda e direita ao longo do tempo, permite verificar a existência de uma variação estatisticamente significativa da forma das extremidades. Segundo Bollerslev & Todorov, 2014 esta variação temporal pode ser relacionada com a variação da forma e a magnitude dos choques no valor do rendimento do ativo subjacente. Além disso, uma medida desta variação pode ser utilizada como um indicador de momentos de maior volatilidade e de crises dos mercados.

A descrição da dinâmica dos choques dos preços dos ativos nos mercados foi também desenvolvida nos trabalhos de Byun et al, 2015 e de Gong & Zhuang, 2016.

Em Byun et al, 2015) é abordado o papel do *premium* da variância e do *premium* de risco nos modelos de GARCH em que foi incorporada a dinâmica dos choques de preços. Neste trabalho é desenvolvido um modelo GARCH de avaliação de opções em descontínuo, utilizando um método de determinação de preços dependente da variância definida segundo o trabalho de Christoffersen et al, 2013, incorporando desta forma a dinâmica da volatilidade e a dinâmica da intensidade dos choques.

Gong & Zhuang, 2016 aplicam à determinação do preço de opções um modelo de volatilidade estocástica determinado por processos de Lévy infinitos (processos estocásticos contínuos no tempo com incrementos estacionários, ou seja, apenas dependentes do tempo entre incrementos, e independentes). Este método consiste na derivação de uma expressão fechada utilizando a função analítica característica da distribuição e a sua transformada de Fourier, tendo por base o modelo de choques de volatilidade estocástica de Bates (ver Bates, 1996), em que o processo de Poisson utilizado foi substituído por processos de Lévy. Nele foram analisados três processos diferentes: processos de variância gama (*Variance Gamma Processes*); processos gaussianos da inversa da normal (*Normal Inverse Gaussian Processes*); processos com uma distribuição clássica estável temperada (*Classical Tempered Stable Processes*²), com transformada de Fourier bem definida (na classe daquelas que permitem caudas de distribuição longas e formação de *clusters* de volatilidade). Esta resolução permite incorporar os efeitos da heteroscedasticidade da volatilidade e dos choques de preços do ativo subjacente. Outro particular interesse da proposta de Gong & Zhuang, 2016 é a utilização de um algoritmo de evolução diferencial como algoritmo de pesquisa para calibrar os parâmetros dos modelos gerados.

Numa reinterpretação da derivação de modelos baseados no movimento browniano, Kleinert & Korbelt, 2016 propõem uma generalização da equação de Black-Scholes por aplicação de uma

² Este tipo de processos foi inicialmente introduzido por Benoit Mandelbrot em 1982 com a designação *Truncated Lévy Flight* para descrever processos estocásticos com passos descritos por distribuições com elevada curtose e infinitamente divisíveis (podendo ser expressas como a soma de um número arbitrário de variáveis iid.).

equação de difusão dupla fraccional (ver Mandelbrot & Van Ness, 1968); este passo tem o seu paralelo na derivação da equação de Black-Scholes expresso na Equação 4.39 no Anexo 1.

Os métodos mencionados até este ponto são todos o resultado de uma análise univariada da volatilidade. Uma das áreas que tem apresentado interessantes desenvolvimentos é a integração de múltiplas distribuições da volatilidade.

Em Baldovin et al, 2015 é feita a derivação de expressões fechadas para determinação do preço de opções incorporando factos estilizados como o agrupamento da volatilidade, a dependência a longo termo e a distribuição não-Gaussiana. De facto, a definição do processo estocástico da volatilidade é feita similarmente ao processo ARCH, com a diferença de que a variável dependente autoregressiva é heterodistribuída em vez de heteroscedástica. A distribuição do valor das ações consiste na integração de M gaussianas com volatilidades σ_i , com $i = 1, \dots, M$, sendo M a medida da memória característica do processo, ou seja, do termo temporal de dependência. Este método provou ser mais adequado que outros métodos, como a equação de Black-Scholes, para maturidades inferiores a dois meses, tendo comparativamente um pior desempenho quanto maior for o tempo até à maturidade.

Rombouts & Stentoft, 2015 deram particular interesse à modelação da distribuição condicional da inovação em conjunto com a média. O modelo correntemente definido como MN-GARCH (GARCH *in mean, nonlinear* GARCH) é uma mistura de dois modelos heteroscedásticos – o modelo de heteroscedasticidade da volatilidade não linear (introduzido por Engle & Ng, 1993) e o modelo de heteroscedasticidade da média. Esta combinação de métodos num processo GARCH de ordem múltipla é robusto e flexível o suficiente para, além de se ajustar aos comportamentos estocásticos da volatilidade, aproximar diferentes tipos de distribuições condicionais – assimétricas, leptocúrticas e multimodais, por exemplo.

Uma abordagem bastante diferente das referidas até agora é a tomada por Gouriéroux & Monfort, 2015 que desenvolveram a análise por fatores. Este modelo pretende determinar a relação entre duas ou mais variáveis, acomodando desta forma a análise de portefólios com uma ou mais opções e um ou mais ativos financeiros subjacentes, utilizando a comparação de um ou mais fatores, ou seja, permitindo uma comparação multi-dimensional, sendo cada fator um processo de Markov, por exemplo, alterações das taxas de juro, inflação, preços de determinadas *commodities*, ou rendimentos de outros ativos financeiros.

Calvet et al, 2015 propõem uma definição da volatilidade por múltiplos fatores e incluindo na variação do estado do regime da volatilidade os choques no valor do ativo subjacente. Este método consiste numa modelação parcimoniosa dos rendimentos de ações em que a tendência estocástica da volatilidade é definida segundo componentes de frequências heterogéneas deduzidas a partir do processo estocástico das ações subjacentes. Alterações da volatilidade a longo prazo geram choques no processo dos rendimentos do ativo subjacente, produzindo um efeito retroativo da volatilidade. Este modelo incorpora as propriedades de persistência da volatilidade heterogénea, escalas múltiplas, decaimento hiperbólico da variância autocorrelacionada e efeitos de alavancagem e dependência entre estados da volatilidade e choques dos preços.

Ainda dentro do tipo da análise por fatores, mas desenvolvendo modelos discretos, existe a proposta de Majewski, et al, 2015. A partir de uma generalização do modelo GARCH multi-componente, em que se consideram diferentes medidas de volatilidade, resultantes da sua determinação em diferentes escalas temporais (ver Christoffersen et al, 2008), e do modelo HARG (*Heterogenous Autoregressive Gamma*, ver Corsi et al, 2013), é introduzido um método para determinar o preço de opções através da modelação discreta multi-fatorial da volatilidade, permitindo incorporar componentes de alavancagem, como a assimetria e a elevada curtose por vezes encontrada na distribuição dos valores da volatilidade.

A análise da distribuição que caracteriza os rendimentos do ativo subjacente de uma opção torna-se ainda mais complexa e computacionalmente intrincada quando a opção é feita sobre múltiplos ativos financeiros. No trabalho de Arismendi & De Genaro, 2016, a solução encontrada para obter uma aproximação analítica do valor de opções com multi-ativos subjacentes, definidas sobre um processo multivariado arbitrário, é obtida através de uma simulação Monte Carlo aplicada sobre a equação de Black-Scholes. Assim, utilizando o método MGEE (*Multivariate Generalised Edgeworth*), o desempenho da metodologia Monte Carlo é melhorado incorporando informação acerca dos momentos da distribuição do risco nulo de múltiplos ativos financeiros por aproximação a uma função de distribuição contínua conhecida (geralmente a log-normal).

Outro fruto da análise da volatilidade é a possibilidade de desenvolver modelos para determinar o preço de um tipo de opções relativamente recente no mercado – opções sobre volatilidade –, presente desde início dos anos 90 (desde a criação do índice de volatilidade VIX). Exemplos deste tipo de opções são a TVO (*Target Volatility Option*), CVS (*Corridor variance Swap*) e DDC (*Double Digit Call option*). Em Da Fonseca et al, 2015 é apresentado um método analítico para a determinação do preço deste tipo de opções utilizando modelos de volatilidade estocástica de Wishart.

Paoletta & Polak, 2015 propuseram modelar um conjunto de dados de rendimentos de ativos através de uma distribuição condicional multivariada com dinâmicas definidas por um processo com características de volatilidade estocástica e GARCH. Neste caso, para encontrar uma função de máxima verosimilhança que possa ser otimizada no caso multivariado, foi utilizado um algoritmo esperança-maximização (*EM-algorithm*). A análise multivariada segundo os dois modelos de volatilidade mencionados permite detetar co-choques no valor dos rendimentos dos ativos, ou seja, choques que são comuns a vários ativos dentro da mesma gama temporal, tornando este modelo útil para analisar a componente, ou fator, dentro da componente multivariada que transmite o *premium* de risco.

À semelhança do modelo de Black-Scholes, em que um portefólio dinâmico de ativos e opções sobre esses ativos se replica de modo a manter uma compensação de rendimentos e perdas (*hedging*), podendo ser considerado um portefólio auto-financiado, Bandi & Bertsimas, 2014 propõem abordar a determinação do preço de opções com um modelo alternativo baseado na otimização robusta. O objetivo é encontrar um modelo que, mantendo usabilidade computacional, possa ser aplicado igualmente tanto a opções simples (e.g. *vanilla options*) como a opções exóticas. Estes

autores aplicam conjuntos de incerteza poliédricos para modelar a dinâmica dos preços dos ativos subjacentes.

A maioria dos modelos desenvolvidos atualmente para determinar o valor de opções reais tem fortes bases teóricas na dinâmica dos movimentos brownianos aplicados aos ativos financeiros. Independentemente dos modelos que se utilizem, é claro que a qualidade dos resultados aumente com o número de combinações de modelos usados e quanto maior for a ordem de cada um desses modelos: mais parâmetros permitirão obter melhores estratégias. Jarrow & Kwok, 2015 argumentam justamente que nem sempre é apropriado aumentar a ordem de um modelo. Antes de aplicar um modelo, é vantajoso determinar qual é o melhor modelo a aplicar. Esta ação é nomeada por estes autores como a importância de estabelecer o *goodness-of-fit* do método. Determinar se um conjunto de dados reflete efeitos como a heteroscedasticidade, a alavancagem, a auto-correlação de observações (e em que ordem), entre outros, é algo que pode ser feito através de conhecidas estatísticas de teste, por exemplo, Ljung-Box, McLeod-Li ou Hong-Li.

Depois de estabelecido o modelo a utilizar para descrever o comportamento de um processo estocástico, as necessidades computacionais da sua implementação podem ainda ser reduzidas utilizando métodos de calibração. Por exemplo, Date & Islyayev, 2015 descrevem como um modelo da volatilidade pode ser implicitamente construído a partir dos valores históricos das opções utilizando os parâmetros Gregos das mais altas ordens, relacionados com a volatilidade. Esta estratégia de modelação da volatilidade permite obter aproximações dos preços das opções na mesma ordem de grandeza que as aproximações obtidas utilizando o método de Heston, utilizando, no entanto, uma pequena fração do tempo de computação.

2 Algoritmo genético

A aplicação do algoritmo genético à determinação do valor de opções baseia-se numa ideia simples: encontrar uma função de parâmetros e valores históricos que descreva o comportamento do preço da opção e usá-la para extrapolar os seus valores futuros; essa função é produzida a partir de uma população de funções geradas aleatoriamente, sendo cada uma modificada, dependendo da sua capacidade para encontrar valores próximos, selecionada e sujeita a operações genéticas, como a reprodução, a mutação e a translocação; após um número adequado de gerações, uma função, melhor que todas as outras a concretizar o objetivo do problema, é selecionada.

No centro das operações de um algoritmo genético está uma população de indivíduos com um tamanho determinado. Cada um desses indivíduos é caracterizado por um genoma e por uma medida de desempenho. O genoma é uma cadeia de genes, as características de cada indivíduo, geralmente codificado por um vector; cada gene é responsável por uma característica que pode ser passada de indivíduo em indivíduo, eliminada ou adicionada ao genoma. O valor de desempenho é o critério de seleção, uma medida de quão apto está a resolver o objetivo, e reflete a possibilidade que o indivíduo tem de sobreviver de geração para geração e de ser selecionado para transmitir os seus genes a outros indivíduos.

2.1 Elementos de um algoritmo genético

Paralelamente à regressão linear, em que um ou mais parâmetros são determinados para descrever uma variável dependente em função de uma ou mais variáveis independentes, neste caso, a função do algoritmo é o de construir uma função que permita determinar o preço de uma opção a partir de certos parâmetros e dados que podem ou não ser relevantes e utilizados nessa função, como por exemplo o valor da ação subjacente, o preço de exercício, o tempo até à maturidade, a volatilidade da ação ou a taxa de juro com risco nulo. Neste caso, como descrito por Chidambaran, 2010, chama-se a este tipo de resolução genética um problema regressão genética.

A relação entre o preço da opção e todos os parâmetros introduzidos é estabelecida pela fórmula encontrada pelo algoritmo que melhor se ajusta por regressão aos valores passados da ação subjacente. Estes valores históricos da ação constituem o dataset de treino. O teste da função produzida pelo algoritmo é feito utilizando os restantes valores históricos, o dataset de teste.

Indivíduos

Os indivíduos deste algoritmo genético são, pois, as fórmulas de cálculo do preço da opção. Estas fórmulas são funções de uma ou mais variáveis independentes introduzidas ou de constantes geradas aleatoriamente.

A representação dos indivíduos, ou a sua codificação, é um dos principais problemas enfrentados na construção de um algoritmo genético. Contudo, uma representação adaptada às características de cada problema pode ser sempre concretizada. No que se refere à programação genética (a

construção de um programa computacional através de algoritmos genéticos), cada indivíduo é frequentemente codificado utilizando árvores binárias, correspondendo cada nodo a uma função, ou sub-rotina ou operação.

Também as funções de cálculo do preço de opções podem ser codificadas como uma árvore binária. Este tipo de abordagem é referido em vários trabalhos (ver Chidambaran, 2010, Abid et al, 2012 e Yin et al, 2007). Cada nó da árvore representa uma operação ou um valor. As operações permitidas sobre as variáveis independentes ou sobre as constantes aleatórias, podem ser operações matemáticas, uma função de distribuição, uma função de distribuição cumulativa ou outras funções analíticas. Quando um nó representa uma operação, então a operação é lida percorrendo os ramos da esquerda para a direita. Como exemplo, a Figura 2.1 representa a árvore binária da equação de Black-Scholes para uma opção de compra.

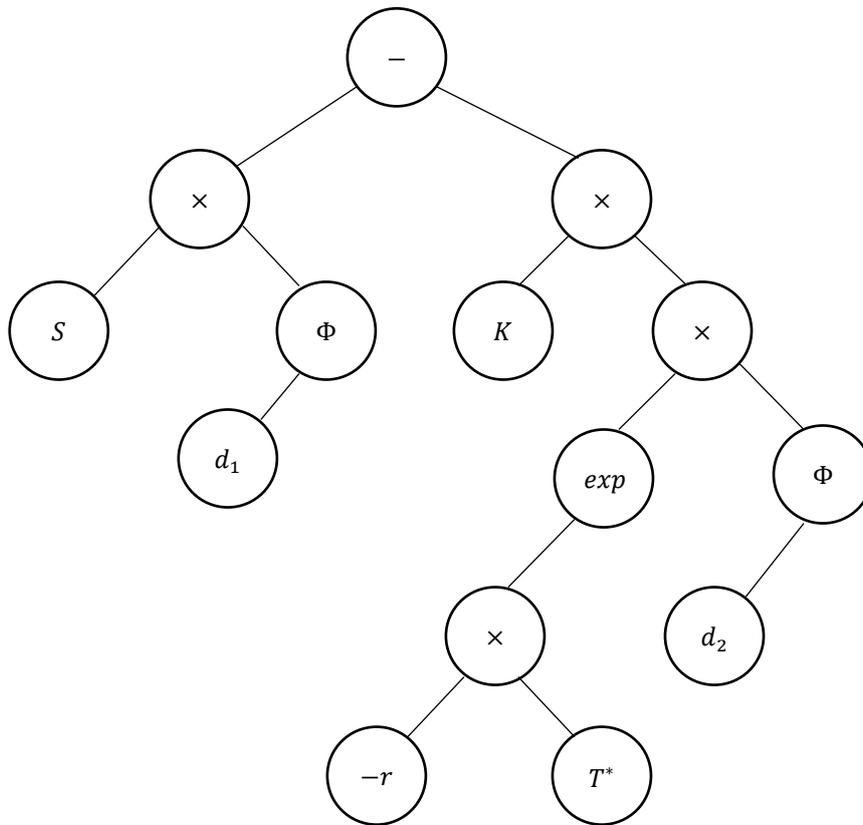


Figura 2.1: Exemplo de uma árvore binária em programação genética. Esta árvore é uma representação simplificada da equação de Black-Scholes para uma opção de compra (os nós com d_1 e d_2 seriam eles próprios sub-árvores; a árvore completa apresentaria 12 níveis de nós): $W = S\Phi(d_1) - Ke^{-rT^*}\Phi(d_2)$.

Não obstante a prática comum de codificar expressões matemáticas como árvores binárias, este método pode tornar-se complicado e computacionalmente muito exigente quando o tamanho das árvores é muito elevado ou o número de indivíduos grande; fatores que são facilmente alcançados na busca por uma função de determinação do preço de opções, consideravelmente mais capaz que os métodos anteriormente referidos, principalmente devido à quantidade de apontadores que é necessário armazenar e gerir no apoio às operações do AG (ver Poli et al, 2008).

Para a aplicação do AG neste trabalho, optou-se por simplesmente codificar cada indivíduo como um vector numérico de números inteiros, cada número correspondendo a um gene: uma função matemática, um operador, um parâmetro, uma constante ou qualquer elemento válido de uma

expressão matemática. Daqui para a frente todos os exemplos referentes a operações genéticas, ou outro elemento da implementação do AG, serão feitos utilizando a forma vetorial.

População

A população é um conjunto de indivíduos. Inicialmente é gerada de forma aleatória; contudo, é essa uma das vantagens de utilizar um algoritmo genético híbrido para determinar um preço melhor aproximado a opções, alguns dos indivíduos iniciais podem ser funções conhecidas por serem elas próprias uma boa aproximação ao resultado final (e.g.: equação de Black-Scholes). O tamanho de uma população pode ou não variar durante a fase de programação.

Medida de Desempenho

É a medida segundo a qual cada indivíduo é avaliado. Seguindo o paralelismo à transmissão de características genéticas, o desempenho corresponde ao grau de adaptação de um indivíduo ao meio ambiente; aqui, reflete-se na maior ou menor probabilidade de um indivíduo ser selecionado para incluir o grupo dos indivíduos que serão sujeitos à possibilidade de sofrerem uma das operações genéticas ou para ser eliminado da população. No presente caso, a função a ser utilizada para determinar quão adaptado é um indivíduo será alguma forma da medida dos resíduos, da diferença entre o preço da opção calculado pelo indivíduo e o real valor da opção. Sendo a seleção genética realizada sobre o conjunto de dados de treino (somente constituído por valores históricos e conhecidos da ação subjacente), o valor real da opção em qualquer período de tempo t será dado por:

$$W_t = \varepsilon(S_T - K) \quad , \quad \varepsilon = \begin{cases} 1, & \text{para uma opção de compra} \\ -1, & \text{para uma opção de venda} \end{cases} \quad \text{Equação 2.1}$$

Em que S_T é o valor da ação subjacente na data de maturidade da opção e K o preço de exercício.

Então, a função de desempenho será algo do tipo:

$$fit = \sum_{t=1}^T |W_{t,X} - W_T| \quad \text{Equação 2.2}$$

Em que $W_{t,X}$ é o preço determinado pelo indivíduo X no período de tempo t e W_T é o valor real da opção conhecido. Quanto menor for a soma dos resíduos, mais apto a determinar o preço correto de uma opção real estará a fórmula que foi composta no indivíduo. No entanto, esta função é aqui apresentada apenas a título de exemplo. Outros fatores devem estar presentes na função de desempenho, como será referido no estabelecimento da função de desempenho no capítulo 3.6.1.

Em conclusão, a medida de desempenho e a ordenação são utilizados para seleção dos indivíduos. Esta medida mimetiza as pressões evolutivas a que os organismos estão sujeitos na natureza.

Critérios de seleção de indivíduos

Em cada iteração do algoritmo, dependendo da medida de desempenho, é selecionado um subconjunto de indivíduos melhor classificados para servirem de progenitores da próxima geração de fórmulas. As fórmulas que melhor descrevem a evolução dos preços têm em si elementos, os genes do indivíduo, que, na conclusão do algoritmo, serão com maior probabilidade inseridos na fórmula final.

Operações genéticas

Anteriormente definidas como as ações do algoritmo que promovem variabilidade genética, a criação de novos indivíduos e, conseqüentemente, a nova população a partir dos indivíduos da anterior população, os progenitores. Serão descritas detalhadamente no capítulo 2.4.

Gerações

As gerações são cada uma das populações obtidas após cada iteração do algoritmo. Idealmente, cada nova geração é constituída por fórmulas individuais que produzem um resultado globalmente mais adequado e ajustado aos dados da opção e da ação subjacente. Num algoritmo genético, o número de gerações máximo está habitualmente definido.

Funções e parâmetros utilizados pelo algoritmo genético híbrido

Uma expressão matemática para determinar o preço de opções financeiras inclui, para além dos operadores matemáticos habituais e de algumas funções comumente observadas nos modelos já aqui mencionados, o valor da ação, os parâmetros definidos contratualmente, e os parâmetros derivados destes, e, por este ser um algoritmo hibridado com a equação de Black-Scholes e o modelo GARCH (1, 1), os parâmetros desses dois modelos e deles derivados. A Tabela 2.1 e a Tabela 2.2 resumem os parâmetros, funções e operadores utilizados.

Tabela 2.1: parâmetros e constantes utilizados nas expressões

Símbolo	Definição	Fonte
1	Constante, número inteiro 1	
2	Constante, número inteiro 2	
0	Zero	
π	Constante pi	
S	Preço da ação no tempo t (S_t)	Mercado
T	Maturidade, tempo até à expiração do contrato ($T^* = T - t$)	Contratual
K	Preço de exercício (<i>strike price</i>)	Contratual
r	Taxa de juro sem risco	Mercado
M	Relação entre o preço da ação e o de exercício ($M = S_t/K$, <i>moneyness</i>)	
$\log R$	Logaritmo do rendimento	
σ	Volatilidade (anualizada)	
$d1$	Parâmetro da equação de Black-Scholes	BS
$d2$	Parâmetro da equação de Black-Scholes	BS
δ	Parâmetro derivado da equação de Black-Scholes	BS
ν	Parâmetro derivado da equação de Black-Scholes	BS
θ	Parâmetro derivado da equação de Black-Scholes	BS
ρ	Parâmetro derivado da equação de Black-Scholes	BS
$a0$	Parâmetro GARCH (1, 1)	GARCH
$a1$	Parâmetro GARCH (1, 1)	GARCH
$b1$	Parâmetro GARCH (1, 1)	GARCH
$cond. \sigma$	Parâmetro GARCH (1, 1)	GARCH

Tabela 2.2: operações e funções possíveis de implementar na codificação de uma função para cálculo do preço de opções (os símbolos utilizados para definir as operações e funções são os utilizados pelo R).

Operação	Descrição	Número de argumentos
+	$x + y$, soma	2
-	$x - y$, subtração	2
/	x/y , divisão	2
*	$x \times y$, multiplicação	2
<i>log</i>	$\ln(x)$, logaritmo natural	1
<i>exp</i>	$e^x \equiv \exp(x)$, exponencial	1
<i>psqr</i>	\sqrt{x} , raiz quadrada	1
^	x^y , potência	2
<i>pnorm</i>	Função de distribuição cumulativa normal estandardizada	1
<i>max</i>	$\max(x, y)$, máximo	2
<i>min</i>	$\min(x, y)$, mínimo	2
<i>abs</i>	Função absoluto	1
(Parêntesis do lado esquerdo	
)	Parêntesis do lado direito	
,	Vírgula	

2.2 Estrutura de um algoritmo genético

O funcionamento de um algoritmo genético (AG) parte da geração de uma população inicial, geralmente de forma aleatória.

Neste trabalho, a proposta de aplicar um híbrido do AG (AGh) – um AG com a introdução de parâmetros da equação de Black-Scholes e do modelo GARCH (1, 1) entre os genes dos indivíduos da população – cria a possibilidade de auferir de uma vantagem face ao AG simples: a incorporação da própria equação de Black-Scholes entre a população inicial que, para além de introduzir um indivíduo com um bom desempenho na população, contribui com bons genes para o desenvolvimento da descendência.

Após a formação da população inicial, e da ordenação dos seus indivíduos com base na sua medida de desempenho, se a condição final do objetivo estiver satisfeita, o algoritmo é terminado e o resultado formulado. Caso contrário, a parte recursiva do algoritmo é iniciada.

A cada um dos ciclos recursivos do algoritmo dá-se o nome de geração. No final de cada iteração é avaliada a satisfação da condição final. Numa geração ocorre a produção de mais indivíduos – a descendência – a partir de um grupo seletor de indivíduos parentais (mais uma vez selecionados segundo a sua medida de desempenho) através de operações genéticas com probabilidades definidas. De uma forma geral, as operações genéticas são as seguintes:

- Reprodução – com probabilidade P_R é selecionado um indivíduo e é feita a sua duplicação, sendo o seu duplo inserido na população, ou seja, o indivíduo é simplesmente copiado para a nova população;
- Translocação (*crossover*) – com probabilidade P_T são selecionados dois indivíduos e é feita a translocação, ou seja, a troca de um ou mais genes entre os dois, dando origem a dois novos indivíduos e sendo ambos inseridos na nova população;
- Mutação – com probabilidade P_M o genoma do indivíduo selecionado é modificado de alguma forma, quer por inserção de um novo gene ou pela deleção de um gene existente, sendo introduzido um mutante na população.

Quando é atingido o tamanho máximo determinado para a população (M), a satisfação da condição final é novamente avaliada, terminando o algoritmo se for confirmada, ou procedendo para o próximo ciclo, e para a formação da próxima geração, caso contrário.

A condição de terminação do algoritmo pode ser a satisfação de um resultado final ou o atingir do número máximo definido de gerações. No presente problema, sendo a medida de desempenho assintótica, como se verá no capítulo 3.6.1, é o segundo caso que define o limite do AG.

A Figura 2.2 esquematiza o funcionamento geral de um AG.

Segundo (Poli, Langdon, McPhee, & Koza, 2008), para aplicar a programação genética na resolução de um problema são necessários cinco passos preparatórios:

- Definição dos terminais do programa, as variáveis a introduzir externamente, funções sem argumentos (e.g.: geração de variáveis aleatórias) e constantes independentes do programa;
- Determinação das funções a executar (neste caso, sendo um problema numérico, essas funções serão as operações aritméticas ou outras funções básicas, como uma distribuição probabilística ou logarítmica, entre outras);
- Estabelecimento dos parâmetros de controlo das simulações do algoritmo;
- Definição dos critérios de terminação e do modo de apresentação do resultado final.

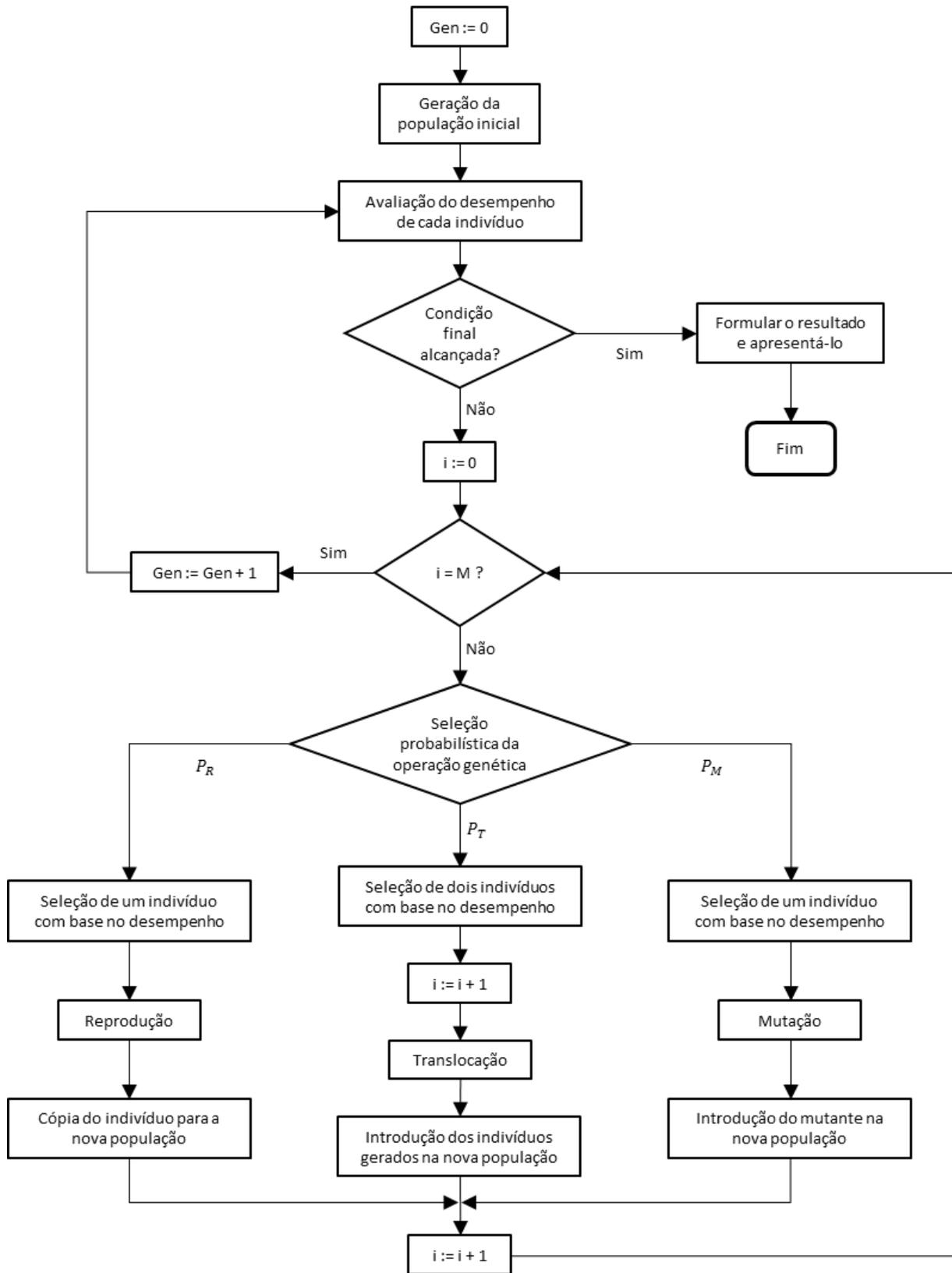


Figura 2.2: Esquema simplificado do funcionamento de um algoritmo genético.

2.3 Os indivíduos e a geração da população inicial

A representação dos genes dos indivíduos é um problema sério neste tipo de algoritmos metaheurísticos, porque o algoritmo manipula diretamente uma representação codificada do problema, cuja tratabilidade matemática pode ficar comprometida e a sua interpretação tornada deficiente se essa representação não for adequada ao problema específico que se pretende resolver (ver Koza, 1992).

Por essa razão, e como será visto no capítulo 3, de implementação do algoritmo, um indivíduo completo é definido por um vector numérico (sobre o qual se realizam todas as operações genéticas), um encadeamento de caracteres (descrevendo a expressão matemática válida codificada pelo vector) e pela medida de desempenho associada.

A geração da população inicial é o primeiro passo da programação genética. Pode ser realizada de diversas formas classificadas em dois tipos fundamentais (ver Koza, 1992):

- Variável (*grow*) – todos os parâmetros, operações e funções são escolhidos aleatoriamente, entre parâmetros terminais ou operações, até o vector atingir ou não o tamanho máximo e sendo a sua forma variável;
- Total (*full*) – são escolhidos parâmetros e funções aleatórias representando apenas operações até ser atingido o tamanho máximo do vector, cujo último elemento será obrigatoriamente um parâmetro terminal. Desta maneira, todos os indivíduos terão o mesmo tamanho.

Koza, 1992 (ver pp. 92 e 93) aconselha um método intermédio entre o variável e o total: *ramped half-and-half*. Este permite que a população inicial seja criada utilizando ambos os métodos fundamentais, permitindo o aparecimento de indivíduos com tamanho muito variado e promovendo uma maior variabilidade de indivíduos.

2.4 Operações genéticas

As operações genéticas do algoritmo são o componente responsável pela variabilidade de uma população. Dependendo do modo como a população é construída em cada iteração do algoritmo, do modo de seleção dos indivíduos parentais e da seleção dos indivíduos que são mantidos na população em cada iteração, as operações genéticas que se optam por efetuar são variações de três operações primárias: a reprodução, a mutação e a translocação. Como já foi referido, a seleção de um pai depende apenas do seu valor de desempenho.

A reprodução consiste apenas na cópia de um indivíduo da população de uma geração para a população da seguinte. Ou seja, pai e filho são o mesmo indivíduo.

A mutação é a modificação aleatória de um ou mais genes de um indivíduo pai para formar um filho diferente.

A translocação, ou *crossover*, será a melhor operação a realizar para aumentar a variabilidade de uma população. Desenvolve-se como a recombinação sexual de dois progenitores para originar dois indivíduos filhos possuidores de características dos pais. Este método é particularmente útil no caso

em que se sabe que existem na população fórmulas que são elas próprias um bom ajuste aos dados reais.

A translocação é feita selecionando um ou mais pontos de recombinação nos dois vectores dos indivíduos parentais e cruzando o ou os segmentos criados entre os dois vectores.

A população gerada a cada geração pelas operações genéticas pode ou não incluir os indivíduos pais.

Outra opção que se pode considerar na realização das operações genéticas é a formação e conservação de agregados de genes. Por exemplo, supondo que algures durante a realização das operações genéticas se formou um agregado de genes, que codifica para uma função ou um conjunto de operações e funções com determinados parâmetros, e que esse agregado foi sendo mantido ao longo de várias gerações, então pode ser vantajoso conservar esse agregado, protegendo-o da sua eliminação da população. Segundo Koza, 1992, a esta ação dá-se o nome de encapsulação. Um dos interesses em guardar certos conjuntos de genes é o de, posteriormente, analisá-lo e inferir sobre que influência terão estas operações e parâmetros na explicação do comportamento da evolução dos preços das opções sobre análise.

Outras operações secundárias podem ser introduzidas num algoritmo de programação genética: permutação (inversão de genes em torno de um gene individual); edição (em que um conjunto de genes é substituído por um outro conjunto de genes mais simples mediante regras definidas, por exemplo, definindo a frequência da edição); e a eliminação (de genes ou conjunto de genes que tornem um indivíduo particularmente desadequado).

Nesta implementação do algoritmo genético, uma vez que os indivíduos selecionados para realizarem as operações genéticas são todos mantidos na geração seguinte, a reprodução não foi considerada. Implementou-se, sim, a realização de duas mutações diferentes – uma modificando aleatoriamente um único gene (ou parâmetro; v. Figura 2.3), outra substituindo um agregado aleatório de genes (um segmento inteiro do vector; v. Figura 2.4) por um segmento de vector gerado aleatoriamente com tamanho máximo definido – e de uma translocação por seleção aleatória de um segmento em cada um dos indivíduos pais (v. Figura 2.5).

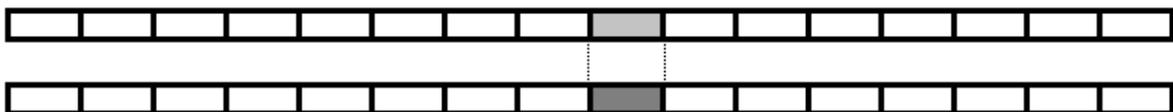


Figura 2.3: esquema de uma mutação de um gene individual.



Figura 2.4: esquema de uma mutação de um segmento de genes.

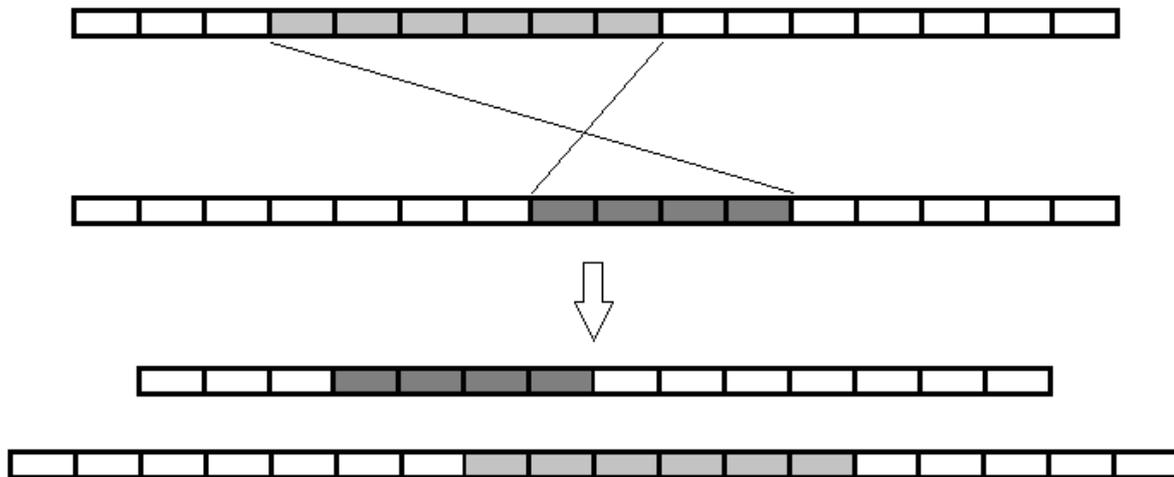


Figura 2.5: esquema da realização de uma translocação. Os dois pais (vectores superiores) cruzam dois segmentos aleatórios dos seus genes, originando os dois filhos.

2.5 Critérios de seleção e medidas de desempenho

O paralelismo com a evolução genética na natureza é claro: indivíduos melhor adaptados têm maiores probabilidades de sobreviver, de se reproduzirem e passarem as suas características genéticas às gerações seguintes.

No caso de um algoritmo genético, o desempenho é geralmente medido criando um valor hierárquico para cada indivíduo na população. A definição da caracterização dos indivíduos centra-se na sua capacidade de aproximar, o melhor possível, o preço determinado de uma opção ao seu valor real num conjunto de dados de teste. Desta forma, o desempenho de um indivíduo será uma medida dos resíduos entre esses dois valores ao longo dos dados históricos. Segundo Koza, 1992, a computação explícita do desempenho pode adquirir quatro medidas diferentes:

- Desempenho em bruto – será o simples somatório das diferenças entre o valor determinado pelo indivíduo em cada período e o valor real; ou seja, a soma dos resíduos ao longo de todo o tempo até à data de maturação da opção (T) – quanto menor, mais bem classificado será o indivíduo;

$$fit = \sum_{t=1}^T |W_{t,x} - W_T| \quad \text{Equação 2.3}$$

- Desempenho estandardizado – a redefinição do desempenho desta forma tem como objetivo definir o melhor valor como o valor mais baixo. Num problema de minimização o desempenho estandardizado equivale ao desempenho em bruto. Caso contrário, o desempenho estandardizado pode ser obtido subtraindo ao valor máximo dos possíveis resultados o valor de desempenho bruto.
- Desempenho ajustado – quando é necessário obter uma medida de desempenho entre 0 e 1 pode-se aplicar a transformação da medida de desempenho acima descrita segundo a fórmula seguinte:

$$fit_{adj} = \frac{1}{1 + \sum_{t=1}^T |W_{t,X} - W_T|} \quad \text{Equação 2.4}$$

- Desempenho normalizado – a normalização do desempenho devolve uma medida relativa à população inteira.

$$fit_{norm,k} = \frac{fit_{adj,k}}{\sum_{k=1}^M fit_{adj,k}} \quad \text{Equação 2.5}$$

Não obstante as definições clássicas acima descritas, o cálculo do desempenho dos indivíduos num problema abordado por um algoritmo genético deve ser feito atendendo às características desse problema. No capítulo 3.6.1 da implementação do algoritmo será apresentada a definição da medida de desempenho escolhida nesta abordagem à determinação do preço de opções.

2.6 Critério de terminação e designação do resultado

Um algoritmo de que se pretende obter um resultado tem obrigatoriamente de terminar em algum ponto. Não sendo possível encontrar uma solução 100% ótima, já que não há nenhuma função que descreva o preço futuro de opções com conhecimento total, encontrar uma fórmula que o aproxime é o melhor resultado. Nesse caso, há duas formas possíveis de obter um resultado: ou se encontra uma fórmula que descreva com um definido grau de confiança a evolução dos preços da opção; ou se termina o ciclo do algoritmo genético após um definido número de iterações, ou seja quando atingido um certo número de gerações.

Após terminação do algoritmo, a designação do resultado, do melhor indivíduo, da fórmula que melhor permite determinar o preço da opção, é feita simplesmente por análise dos valores de desempenho de todos os indivíduos na população final. O indivíduo melhor é aquele que tem o maior valor de desempenho.

Aqui se apresenta outra das vantagens de utilizar a programação genética de fórmulas: sendo apenas necessário o melhor dos indivíduos gerados, todos os outros podem ser esquecidos, não sendo necessário ocupar memória.

2.7 Parâmetros de controlo

A definição dos parâmetros de controlo deve ser feita caso a caso. Um resumo dos parâmetros de controlo implementados será feito nos capítulos 3.6.3 e 3.6.4.

Alguns dos parâmetros de controlo já têm vindo a ser introduzidos nos capítulos anteriores: o tamanho da população inicial, e o da população ao longo das iterações do AG, o tamanho máximo das expressões geradas, o número de gerações, o número de indivíduos de uma geração mantidos para a próxima e a probabilidade de ocorrência das operações genéticas são alguns dos parâmetros

básicos. Estes parâmetros são também exemplos de valores que são muitas vezes modificados ao longo dos estudos efetuados sobre o funcionamento do algoritmo tendo em vista a sua otimização.

Outros parâmetros de controlo têm uma função opcional. Definir a estratégia de funcionamento do AG, por exemplo definindo se se realiza a sobre-seleção dos melhores indivíduos (modificando-lhes deliberadamente o valor de desempenho em dado momento da operação do algoritmo) ou se, de uma forma elitista, se protege os melhores indivíduos da eliminação, podem ser opções que se fazem à partida para intencionalmente reduzir a variabilidade das populações do algoritmo e aumentar a sua performance.

3 Implementação do algoritmo genético híbrido e resultados

Esta é a descrição da implementação de um algoritmo genético híbrido para encontrar uma expressão analítica para determinar o preço de opções reais. Esta expressão não é deduzida ou implementada segundo qualquer comportamento teórico ou espectável do mercado ou dos investidores, mas gerada aleatoriamente e evolutivamente selecionada dependendo apenas dos dados históricos de uma ação subjacente e dos parâmetros deles derivados e dos parâmetros fornecidos pela aplicação de dois métodos estocásticos aproximados: a equação de Black-Scholes e o modelo GARCH (1, 1).

Neste capítulo são descritas as particularidades da aplicação deste método, da origem dos dados aos resultados obtidos, passando pelos mecanismos da implementação do algoritmo genético.

3.1 Linguagem de programação e características do sistema

Optou-se por utilizar o , por ser um software dedicado a estudos estatísticos, por providenciar fáceis representações gráficas, por muitas e diversificadas funções estarem já codificadas e disponibilizadas livremente sobre a forma de pacotes de instalação e, finalmente, por ser uma linguagem muito próxima da C++. Além disso, a existência do software de ambiente de desenvolvimento para o , o , torna a utilização do  mais intuitiva e simplificada. A versão do  utilizada foi a 3.2.2 (de 64 bits).

Para que se tenha uma noção das exigências computacionais da aplicação do AG, refere-se ainda que todas as computações realizadas para obtenção dos resultados foram feitas num computador com um processador Intel® Core™ i3-3110M CPU @ 2.40 GHz e 6,00 GB de RAM.

3.2 Bases de dados e informação financeira

Uma grande quantidade de informação sobre ações está disponível livremente em fontes de sítios da internet. Em particular, e esta é mais uma vantagem de usar o  nesta aplicação, o motor de busca Quandl³ permite o fácil acesso a muitos *datasets* de informação financeira através de uma API (*Application Programming Interface*) existente no .

Esses conjuntos de dados, vantajosamente, estão prontos a utilizar: estão limpos (geralmente sem *outliers* nem valores desconhecidos), muito completos, atualizados até dois dias atrás do presente e, em alguns casos, oferecem um número de observações que ultrapassa a dezena de milhar, com dados que recuam até aos anos 60. Por exemplo, e aproveitando para introduzir um dos conjuntos de dados utilizados para testar o algoritmo genético híbrido, na Figura 3.1 mostra-se a evolução dos

³ v. <https://www.quandl.com/> – este motor de busca de dados numéricos oferece acesso a milhões de *datasets* financeiros, económicos e sociais, muitos deles com acesso livre.

preços de fecho históricos das ações da AmGen, cotadas na Nasdaq (Yahoo Finance, 2016), composta por 7938 observações.

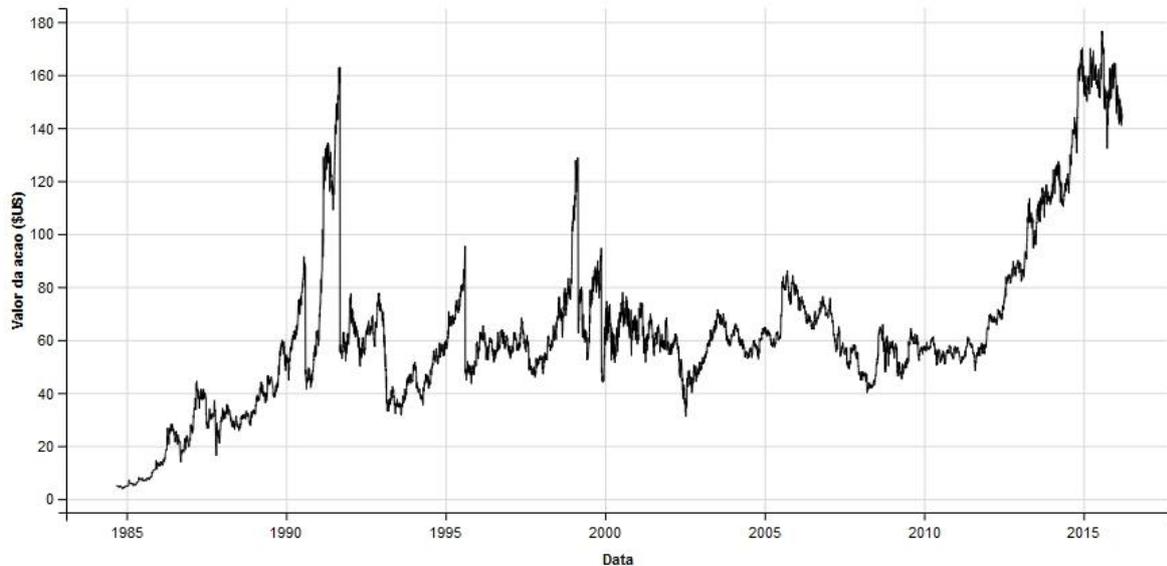


Figura 3.1: Evolução do preço de fecho das ações da AmGen entre 7 de setembro de 1984 e 18 de março de 2016, cotadas na Nasdaq (fonte: YFinance at <http://finance.yahoo.com/>, através da API Quandl).

Outro parâmetro necessário à implementação dos métodos de cálculo do preço de opções é a taxa de juro sem risco, que consiste geralmente nas taxas de juro referidas por agências governamentais, em que o risco de incumprimento é negligenciável. Para o corrente estudo, uma vez que os conjuntos de dados mais facilmente disponíveis e com mais observações são os cotados na Nasdaq, recorreu-se aos valores históricos das taxas de juro diariamente atualizadas dos fundos federais americanos. Mais uma vez, a utilização do  permite facilmente obter os dados correspondentes a partir do sítio da Reserva Federal Americana (Board of Governors of the Federal Reserve System, 2016), onde os valores estão diariamente atualizados, desde 1 de julho de 1954 até três ou quatro dias atrás do presente (Figura 3.2).

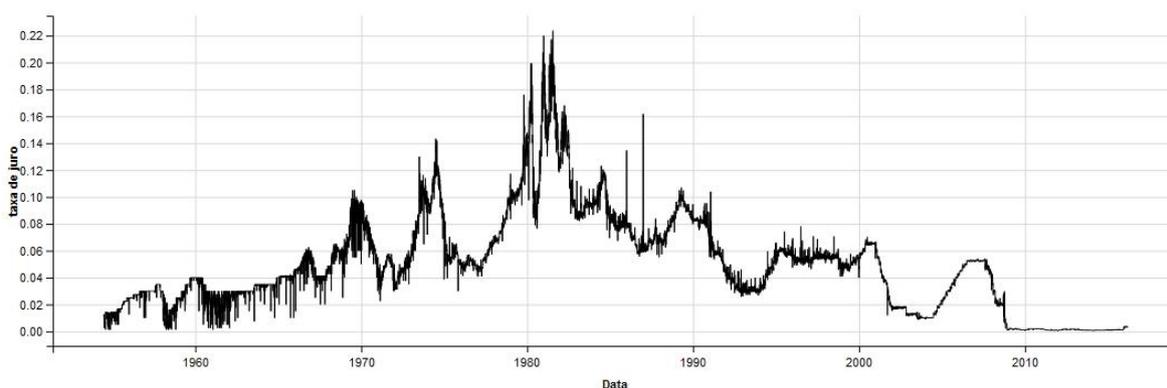


Figura 3.2: evolução da taxa de juro. Gráfico obtido a partir dos valores diários da taxa de juro da Reserva Federal Americana (Board of Governors of the Federal Reserve System, 2016).

A quantidade de observações disponíveis para construir um conjunto de dados de treino é muito importante não só para treino do algoritmo genético, mas também para a obtenção dos parâmetros do modelo GARCH, que serão mais exatos quantas mais observações existirem. Apenas a equação de Black-Scholes não precisa de muitos dados para ser aplicada: para obter os valores das opções é

necessário conhecer a volatilidade do ativo subjacente, o que, se se considerar a volatilidade anualizada, os preços da ação no primeiro ano são utilizados para obter os primeiros valores da volatilidade. Eliminado assim o primeiro ano de valores do ativo subjacente, são ainda eliminados os últimos valores do conjunto de dados, correspondentes ao período de maturidade considerado. No caso das ações da AmGen, utilizadas aqui como exemplo, o conjunto de dados de treino final é constituído por cerca 7600 observações.

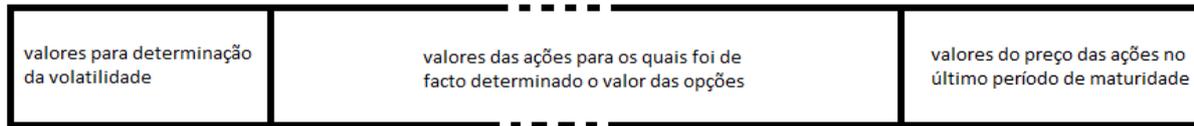


Figura 3.3: estrutura de um conjunto de dados de treino.

3.3 Determinação dos parâmetros fundamentais

Para além dos valores necessários em cada observação já mencionados para o cálculo do preço de uma opção – a data, o valor da ação, a taxa de juro sem risco, a maturidade e o preço de exercício – são ainda necessários, para a aplicação dos métodos utilizados neste estudo, mais um conjunto de parâmetros: o logaritmo do rendimento (v. Equação 3.1), o lucro diário (v. Equação 3.2), a razão entre o preço da ação e o preço de exercício, ou *moneyness*, (v. Equação 3.3) e a volatilidade anualizada (v. Equação 3.4).

$$\text{logaritmo do rendimento} = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) \quad \text{Equação 3.1}$$

$$\text{lucro diário} = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} \times 100 \quad \text{Equação 3.2}$$

$$\text{moneyness} = \frac{S_t}{K} \quad \text{Equação 3.3}$$

$$\text{volatilidade anual} = \frac{\text{var}(\text{lucro diário}) \times \sqrt{\text{número de dias úteis no ano}}}{100} \quad \text{Equação 3.4}$$

Na aplicação dos três métodos – a equação de Black-Scholes, o modelo GARCH (1, 1), e o algoritmo genético híbrido – são apenas apresentados os cálculos para uma opção de compra. Para criar uma consistência de valores, considerou-se que o preço de exercício (K) é sempre igual a 90% do valor da ação arredondado à dezena mais próxima e que a maturidade é sempre de 30 dias.

Além destes parâmetros, importa também referir a determinação do preço real da opção, que não é mais que a diferença entre o preço atualizado da ação na maturidade da opção e o seu valor de exercício.

3.4 Implementação da equação de Black-Scholes

A equação de Black-Scholes, descrita no capítulo 1.1 e deduzida em pormenor no Anexo 1, pode ser facilmente utilizada para determinar para cada observação o valor da opção. Não obstante, foi utilizada, ao invés da expressão analítica, uma função do **R** disponibilizada pelo pacote `fOptions`. Apenas foi usada a expressão analítica para determinar os parâmetros d_1 e d_2 da equação de Black-Scholes (v. Equação 1.13, no capítulo 1.1). A conveniência do pacote de função `fOptions` permite obter facilmente o valor não só da opção, mas também o dos parâmetros derivados da equação – os Gregos (v. Anexo 2) – simplesmente introduzindo o tipo de opção (de compra ou venda), o valor da ação, o preço de exercício e o tempo até à maturidade, a taxa de juro sem risco e a volatilidade anualizada (além do custo de porte da opção, definido pelo investidor e aqui omitido).

Desta forma, ficam acrescentados aos parâmetros anteriormente determinados os valores de d_1 e d_2 (parâmetros da equação de Black-Scholes), do *delta*, *vega*, *teta* e *rho* (parâmetros Gregos derivados da equação de Black-Scholes) e o valor da opção determinado segundo a equação de Black-Scholes.

3.5 Implementação do modelo GARCH (1, 1)

Existe alguma complexidade na implementação do modelo GARCH, principalmente devido à determinação dos parâmetros do modelo. A minimização da função de máxima verosimilhança da equação da volatilidade condicionada é computacionalmente exigente, sendo difícil encontrar um método de minimização que seja ao mesmo tempo satisfatoriamente aproximado e eficiente. Fortuitamente, o **R** também fornece um pacote de funções dedicado à modelação de processos estocásticos utilizando modelos autorregressivos, de média variável e de variância heteroscedástica⁴. O pacote `rugarch` realiza muito eficazmente, com um tempo de processamento relativamente curto, a determinação dos parâmetros através da minimização da equação da volatilidade condicionada para todo o *dataset*.

Após a especificação das características do modelo a aplicar, neste caso o modelo GARCH (1, 1) simples, sem a introdução de um modelo para a evolução da média, a realização da regressão do modelo a todas as observações existentes no conjunto de dados e a consequente obtenção dos parâmetros do modelo.

Tal como descrito na Equação 1.15 no capítulo 1.2, obtiveram-se os parâmetros $\alpha_0 \approx 1.7062 \times 10^{-5}$, $\alpha_1 \approx 0.12989$ e $\beta_1 \approx 0.85467$ para as ações da AmGen que têm servido este exemplo.

O passo seguinte da implementação deste modelo é a simulação Monte Carlo de valores para a volatilidade condicional considerando até quantas observações se pretende fazer essa simulação, ou seja, quanto tempo existe até à maturidade. A obtenção da volatilidade condicionada permite obter

⁴ O **R** possui na verdade dois pacotes de funções para a aplicação destes modelos – o `rugarch` e o `fGARCH` (para além de outros para a realização de testes de heteroscedasticidade) –, optou-se pelo primeiro apenas devido à facilidade de uso.

uma previsão para o valor da ação na maturidade (v. Equação 1.18 no capítulo 1.2) e, conseqüentemente, o valor da respectiva opção (v. Equação 1.19 no capítulo 1.2).

Neste ponto, será talvez útil ter uma percepção dos resultados obtidos segundo os dois métodos estocásticos apresentados. A Figura 3.4 mostra uma representação gráfica desses valores estimados face ao valor real para as ações da AmGen.

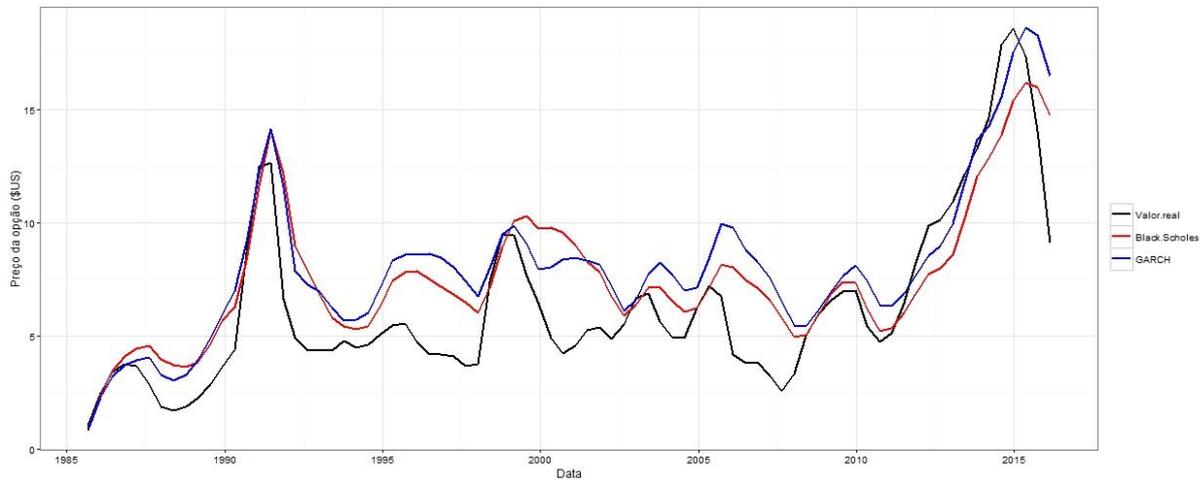


Figura 3.4: evolução dos preços das opções determinados sobre as ações da AmGen segundo a equação de Black-Scholes (a vermelho) e o modelo GARCH (1, 1) (a azul), comparados ao valor real (a preto). As linhas do gráfico correspondem a uma aproximação suavizada dos valores determinados, que apresentam muito ruído.

3.6 Construção do algoritmo genético híbrido

A implementação do algoritmo genético híbrido foi feita coalescendo o resultado de três componentes centrais. Em primeiro lugar, a determinação de todos os parâmetros relacionados com as cotações da ação subjacente no mercado e dos parâmetros relacionados com a equação de Black-Scholes e o modelo GARCH (1, 1), resultando no conjunto de dados de treino utilizado pelo algoritmo. A formação de uma população inicial aleatória, não tendo sido introduzida diretamente dentro do algoritmo, por ser essencialmente uma parte precursora do meio iterativo do algoritmo, constitui a segunda componente. Por fim, a terceira componente, o algoritmo genético em si, comportando as operações genéticas e a formação de gerações sucessivas e das suas populações.

A Figura 3.5 ilustra o movimento de informação entre as várias componentes e o modo como as várias funções programadas para a utilização do algoritmo estão intercaladas.

Antes de descrever o objetivo e a razão de criação de cada função do algoritmo genético, é talvez necessário esclarecer o modo de ordenação dos indivíduos segundo a medida de desempenho, já que é ela a peça central da seleção natural.

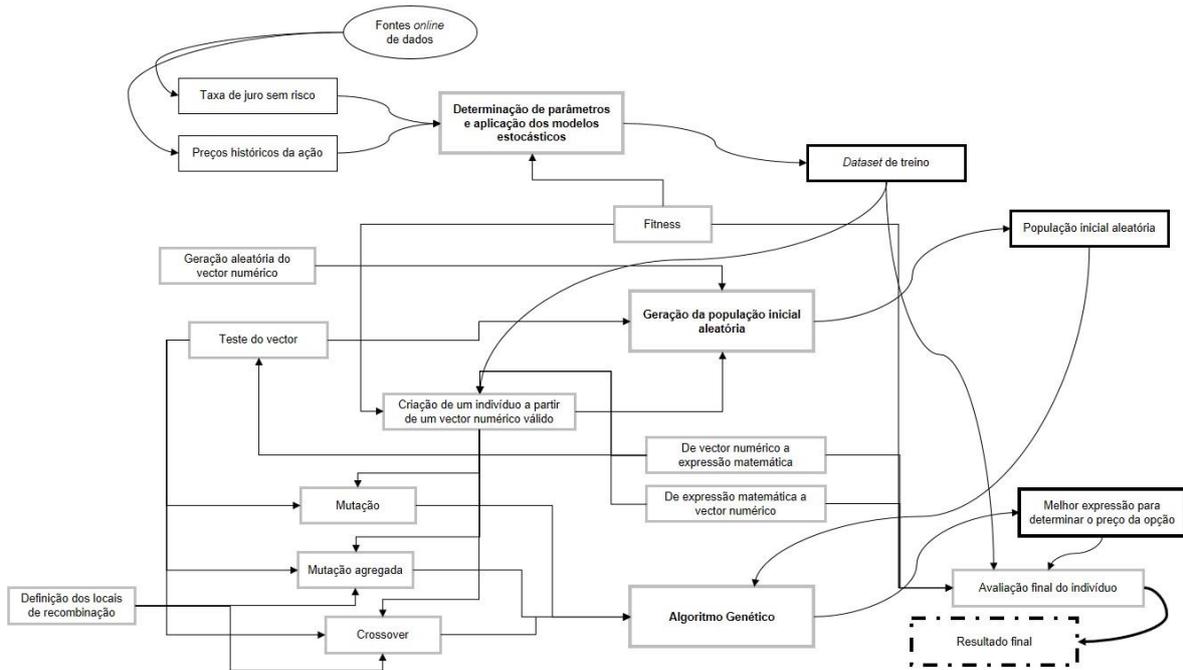


Figura 3.5: fluxograma da implementação do algoritmo genético híbrido. As caixas de contorno cinzento são funções do AG, as com contorno negro são resultados; as setas curvas representam fluxo de informação e as retas indicam que funções são utilizadas por que outras funções.

3.6.1 Medida de desempenho e a classificação dos indivíduos genéticos

O desempenho de um indivíduo, como introduzido no capítulo 0, é uma medida dos resíduos entre o valor determinado pelo indivíduo e o valor real observado no conjunto de dados de teste. Numa tentativa de standardizar o valor de desempenho, tornando-o comparável entre conjunto de dados de diferentes ações, e de obter um valor tratável e facilmente analisável, desenvolveu-se a função de desempenho aqui apresentada na Equação 3.5.

$$medida\ de\ desempenho = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N (resíduo_i^2)}}{N}} \times \left[1 - \left(\frac{\sum_{i=1}^N (Opção_{GA_i} == 0)}{N} \right)^4 \right] \quad \text{Equação 3.5}$$

A desconstrução desta função é relativamente simples: o somatório do quadrado dos resíduos serve para garantir que não haja compensação devida a valores positivos e negativos de resíduos; como o valor deste somatório é tendencialmente muito elevado (atingindo facilmente, para mais de 7000 observações, ordens de grandeza de 10^5), introduziu-se a sua raiz quadrada; realizar a média da raiz quadrada do somatório do quadrado dos resíduos, é mais uma forma de tornar esse valor ainda mais pequeno. Como se pode observar, tal como o sugerido na Equação 2.4, no capítulo 0, utilizou-se uma forma do desempenho ajustado, para obter um número entre 0 e 1, tendo-se o melhor valor como o mais próximo de 1.

A introdução do segundo termo da equação é um resultado das particularidades da determinação do valor de uma opção. Devido às condições contratuais de uma opção, ela só terá valor, e consequentemente só será exercido o direito da opção de compra ou venda se o valor do preço de

exercício for inferior ou maior, para uma opção de compra ou de venda respetivamente, que o preço da ação; caso contrário, a opção tem valor nulo. Pode acontecer que os indivíduos gerados aleatoriamente, ou produzidos pelas operações genéticas do AG, determinem valores demasiado baixos para as opções de um determinado conjunto de dados, criando uma linha de valores maioritariamente nulos. Por essa razão, decidiu-se introduzir um termo que servisse de desvantagem a esses indivíduos: a fração de opções valorizadas a zero elevado a uma potência (arbitrada como 4). Desta forma, expressões de indivíduos que valorizem como nulas a maior parte das opções são sobremaneira penalizadas; por outro lado, os indivíduos que apresentem uma fração razoável de opções nulas (provavelmente não muito afastado do determinado por outros métodos) são muito pouco penalizados, aumentando a sua probabilidade de se manterem na população do AG.

Embora esta função de desempenho esteja adaptada para proceder à ordenação dos indivíduos, outras versões dela poderiam ser consideradas. Por exemplo, em vez de se fazer a raiz quadrada da soma dos resíduos, talvez seja suficiente somar os módulos dos resíduos.

3.6.2 Os indivíduos e as populações do algoritmo genético híbrido

No algoritmo genético aqui apresentado, os indivíduos são constituídos pelas seguintes componentes:

- Um vector numérico de números inteiros que codifica para uma expressão matemática válida;
- Uma expressão matemática (sob a forma de uma cadeia de caracteres) que possa ser matematicamente avaliada;
- O valor de desempenho;
- A geração em que foram gerados.

Esta forma de codificar os indivíduos do AGh no  implica que tenham de ser introduzidos como uma lista dos elementos referidos nos pontos acima.

Desta forma, a população no AGh é uma lista ordenada das listas dos indivíduos com o melhor indivíduo, o que possui maior valor de desempenho, no topo.

A principal razão para a codificação dos indivíduos e população desta forma é, para além de esta ser a forma mais clara para agregar dados de classes diferentes, o facto de se tornar mais simples a realização de operações como a ordenação, a eliminação ou a seleção dos elementos.

3.6.3 Função de geração da população inicial aleatória

A parte central da geração aleatória da população é a formulação de um vector aleatório que codifique para uma expressão matemática (“geração aleatória do vector numérico”, na Figura 3.5). A descrição dos parâmetros e das funções e operações matemáticas utilizadas na determinação do preço das opções já foi introduzida do capítulo 0. A função de geração de um vector numérico aleatório tem como objetivo juntar os códigos numéricos desses parâmetros, funções, operações e elementos de forma a obter uma expressão válida. A Tabela 3.1 resume a codificação dos parâmetros, funções, operações e outros elementos.

Apesar de não terem sido introduzidas outras funções de distribuição, tendo-se perdido a oportunidade de avaliar o possível contributo, de funções como a de t-Student ou a log-normal, ou a sua melhor capacidade para aproximar o valor das opções ao valor real, os elementos considerados na construção das expressões são suficientes para demonstrar o comportamento do algoritmo genético.

Naturalmente, a panóplia de elementos que podem ser considerados numa expressão matemática é muito elevada. Alguns atalhos podem ser concretizados, por exemplo: a introdução dos números inteiros 1 e 2 é suficiente para gerar qualquer número do conjunto dos números reais. Aumentar a variabilidade de elementos nas expressões matemáticas geradas poderá, portanto, contribuir para o melhoramento da prestação deste algoritmo.

Numa outra nota deve-se referir que a codificação da função de geração aleatória do vector numérico de expressões matemáticas (na *Figura 3.5* corresponde à caixa com o texto “geração aleatória do vector numérico”) está longe de ser perfeita e não corre sem ocasionalmente devolver expressões com erros de síntese matemática (erros que são omitidos da aplicação das funções mediante funções de controlo temporal e de erros implementadas na programação das funções). Apesar de esta função desempenhar o seu objetivo satisfatoriamente, não piorando significativamente o tempo de processamento ou a capacidade de obter funções mais flexíveis, a otimização desta função será um dos elementos que poderá ser melhorado.

A implementação de duas funções acessórias para a transformação do vector numérico na expressão matemática (“de vector numérico a expressão matemática” na *Figura 3.5*) e vice-versa (“de expressão matemática a vector numérico” na *Figura 3.5*), constitui a primeira validação do vector numérico construído. No entanto, criar uma função de pré-teste do vector numérico do indivíduo (“teste do vector” na *Figura 3.5*), substituindo os parâmetros por valores fictícios, antes de aplicar a expressão gerada a todas as observações do conjunto de dados de treino, tornou-se uma forma de tornar todo o AG mais eficiente computacionalmente, reduzindo drasticamente o tempo de computação.

Tabela 3.1: codificação numérica dos parâmetros, funções e operações matemáticas e outros elementos utilizados na construção das expressões dos indivíduos do algoritmo genético híbrido.

1	/	13	1	25	<i>delta</i>
2	*	14	2	26	<i>vega</i>
3	\wedge	15	<i>pi</i>	27	<i>teta</i>
4)	16	<i>S</i>	28	<i>ro</i>
5	(17	<i>T</i>	29	<i>a0</i>
6	<i>log</i>	18	<i>K</i>	30	<i>a1</i>
7	<i>exp</i>	19	<i>r</i>	31	<i>b1</i>
8	<i>sqrt</i>	20	<i>M</i>	32	<i>cond.sigma</i>
9	<i>pnorm</i>	21	<i>logR</i>	33	+
10	<i>max</i>	22	<i>sigma</i>	34	-
11	<i>min</i>	23	<i>d1</i>	35	0
12	<i>abs</i>	24	<i>d2</i>	36	,

Após a geração de cada vector numérico aleatório, e da sua validação, cada indivíduo é construído, obtendo-se a respetiva expressão matemática e medida de desempenho, utilizando uma função específica criada para o efeito. Na Figura 3.5 esta função corresponde à caixa com o texto “criação de um indivíduo a partir de um vector numérico válido”.

A aplicação da função, com a definição dos parâmetros de controlo e o seu valor pré-definido, e o resultado devolvido pela função de geração da população inicial aleatória está resumido na Tabela 3.2.

Tabela 3.2: aplicação e resultado devolvido pela função de geração da população inicial aleatória.

Função – geração da população inicial aleatória	
Aplicação da função	
Parâmetros de controlo	Default
Dataset de treino	---
Valor mínimo de desempenho dos indivíduos gerados	0
Definição do valor mínimo de desempenho como uma percentagem da média dos valores da equação de Black-Scholes e do modelo GARCH (1, 1)	TRUE
Percentagem do valor mínimo de desempenho	0.001
Valor máximo de desempenho dos indivíduos gerados	1
Definição do valor máximo de desempenho como uma percentagem da média dos valores da equação de Black-Scholes e do modelo GARCH (1, 1)	FALSE
Percentagem do valor máximo de desempenho	10000
Número de indivíduos na população	100
Tamanho máximo dos vectores dos indivíduos da população inicial	60
Introduzir o parâmetro volatilidade não condicional	TRUE
Introduzir os parâmetros relacionados com a equação de Black-Scholes	TRUE
Incluir a equação de Black-Scholes na população inicial	TRUE
Introduzir os parâmetros do modelo GARCH (1, 1)	TRUE
Resultado da função	
Uma lista com N indivíduos ordenados decrescentemente segundo o seu valor de desempenho, cada um constituído por uma lista incluindo:	Vector numérico
	Expressão matemática (<i>string</i>)
	Valor de desempenho
	Geração em que o indivíduo foi gerado (= 0)

3.6.4 Função do algoritmo genético

A função que desenvolve o algoritmo genético em si consiste essencialmente na junção de dois ciclos incorporados um no outro. O primeiro é responsável pela passagem e contagem das gerações; o segundo, onde são chamadas as operações genéticas, compreende a construção da população de cada geração, através dessas operações genéticas aplicadas a um número definido de indivíduos provenientes da geração anterior.

Que operações genéticas foram implementadas e o que faz cada uma já foi descrito no capítulo 2.4. Apenas se acrescenta que também neste caso se recorreu à função de pré-teste de vectores numéricos antes da utilização da função de “criação de um indivíduo a partir de um vector numérico válido” (v. Figura 3.5).

A Tabela 3.3 resume os parâmetros de controlo utilizados na função dedicada ao algoritmo genético híbrido e o resultado devolvido por essa função.

Tabela 3.3: aplicação e resultado devolvido pela função de aplicação do algoritmo genético híbrido.

Função – algoritmo genético		
Aplicação da função		
Parâmetros de controlo		Default
Dataset de treino		---
População inicial		---
Número máximo de gerações		5
Número máximo de indivíduos na população		10
Número de indivíduos a manter da população da geração anterior		5
Tamanho mínimo do vector numérico dos descendentes		20
Tamanho máximo do vector numérico dos descendentes		150
Probabilidade de ocorrência de uma mutação num único gene		0.25
Probabilidade de ocorrência de uma mutação num agregado de genes		0.30
Probabilidade de ocorrência de uma translocação		0.45
Tamanho máximo do segmento aleatório de vector gerado para a mutação agregada		20
Valor mínimo de desempenho dos indivíduos gerados		0
Definição do valor mínimo de desempenho como uma percentagem da média dos valores da equação de Black-Scholes e do modelo GARCH (1, 1)		TRUE
Percentagem do valor mínimo de desempenho		0.001
Valor máximo de desempenho dos indivíduos gerados		1
Definição do valor máximo de desempenho como uma percentagem da média dos valores da equação de Black-Scholes e do modelo GARCH (1, 1)		FALSE
Percentagem do valor máximo de desempenho		10000
Número de indivíduos na população		100
Tamanho máximo dos vectores dos indivíduos da população inicial		60
Introduzir o parâmetro volatilidade não condicional		TRUE
Introduzir os parâmetros relacionados com a equação de Black-Scholes		TRUE
Incluir a equação de Black-Scholes na população inicial		TRUE
Introduzir os parâmetros do modelo GARCH (1, 1)		TRUE
Resultado da função		
Uma lista incorporando o melhor indivíduo e outros dados sobre a computação do AG	Uma lista com os dados do melhor indivíduo gerado pelo AG	Vector numérico
		Expressão matemática (<i>string</i>)
		Desempenho
		Geração em que o indivíduo foi gerado
	Tempo de computação	
	Número de mutações simples ocorridas	
	Número de mutações agregadas ocorridas	
	Número de translocações ocorridas	
	Um <i>dataframe</i> de rastreamento do maior valor de desempenho ao longo das gerações composto pelas colunas:	Número da geração
		Melhor desempenho
Número da geração em que o melhor desempenho ocorreu		

O resultante melhor indivíduo obtido do AG, para obter uma representação final e verificar como se comporta face aos dois métodos estocásticos utilizados como comparação, pode ser submetido a uma última função, representada pela caixa com o texto “avaliação final do indivíduo” na Figura 3.5. Deste modo, para além de se obter uma comparação entre os valores de desempenho, tem-se uma representação gráfica final que sobrepõe visualmente o comportamento dos três modelos e de que se dá dois exemplos no próximo subcapítulo.

A título de exemplo, apresenta-se no Anexo 4 o código criado para fabricar esta função.

3.7 Resultados da implementação do algoritmo genético híbrido

A aplicação do algoritmo genético híbrido para encontrar uma expressão analítica que determine um preço para uma opção financeira próximo do que lhe seria atribuído caso se tivesse conhecimento total do seu comportamento é possível. Mais do que isso, nos vários testes feitos ao algoritmo aqui descrito, para diferentes ações financeiras, foram quase sempre encontradas expressões com melhor performance do que os dois modelos usados como base de comparação.

Os testes realizados foram feitos utilizando os parâmetros de controlo com os valores padrão definidos no capítulo 3.6 sobre a implementação do algoritmo. Durante os testes apenas se variou o número de gerações, o valor da população máxima de cada geração e o número de indivíduos de cada população a manter de uma população para a seguinte. Desta forma foi possível obter uma ideia dos valores que mais influenciam o alcançar de uma solução boa.

Terminando agora com o exemplo usado até aqui, o das ações da AmGen, apresenta-se uma das expressões encontradas pelo AG para determinar o preço de opções tal como devolvido pela programação do algoritmo:

```
$GA.char
expression(T + d1 + ro * sqrt ( abs ( r * K ) ) - d2 + ro * sqrt ( abs
( r * S ) ) - b1 ^ sqrt ( abs ( + d1 * d1 - ro ) ) ^ vega * b1 ^ sqrt (
abs ( + delta * vega - 2 ) ) ^ 2 ^ sqrt ( abs ( + pi * sigma - r ) ) ^ S
^ sqrt ( abs ( + b1 * b1 - 2 ) ) ^ 2 ^ sqrt ( abs ( + pi * sigma - delta
) ) ^ teta + b1 + 2 ^ T ^ sqrt ( abs ( + cond.sigma * teta - vega ) ) ^
d1 + 1 + S - K - 2 * exp ( - 2 * a0 ) * pnorm ( d2 )
```

A mesma expressão, sob a forma editada e simplificada de uma equação, será:

$$c = T^* + d_1 + P \times \sqrt{rK} - d_2 + P \times \sqrt{rS} - b_1 \left(v \times \sqrt{|d_1^2 - P|} \right) \times b_1 \left(4S \theta \times \sqrt{|\Delta v - 2||\pi \sigma - r||b_1^2 - 2||\pi \sigma - \Delta|} \right) + b_1 + 2^{(T^* d_1 \times \sqrt{|\sigma_{cond} \theta - v|})} + 1 + S - K - 2 \exp(-2 a_0) \times \Phi(d_2) \quad \text{Equação 3.6}$$

Esta expressão foi a determinada pelo AGh gerando uma população inicial de 100 indivíduos (incluindo a equação de Black-Scholes), e realizando 500 gerações, cada uma com uma população máxima de 50 indivíduos e mantendo, na passagem de uma geração para a seguinte, 15 indivíduos. No final do processamento, após 9.5 h, tinham sido gerados aproximadamente 8000 indivíduos e realizadas cerca de 5800 operações genéticas.

Comparando a capacidade desta equação com a equação de Black-Scholes e o modelo GARCH (1, 1), que possuem respectivamente os valores de desempenho 0.9377750 e 0.9364176, a Equação 3.6 resulta num desempenho de 0.9418619, ou seja, cerca de 0.5% maior que média dos valores dos outros dois modelos. Contudo, talvez seja mais simples inferir sobre a melhor aptidão desta equação, fazendo-se uma comparação entre os valores dos resíduos médios de cada método:

- Resíduo médio da equação de Black-Scholes – 4.22;
- Resíduo médio do modelo GARCH (1, 1) – 4.34;
- Resíduo médio da expressão obtida pelo AG híbrido – 3.69.

Como se pode verificar, a expressão gerada pelo AG híbrido consegue determinar valores para a opção cerca de 13.7 % mais próximos dos reais que a média dos outros dois modelos.

A Figura 3.6 mostra um gráfico aproximado do comportamento dos três modelos aplicados (no Anexo 5 pode ser vista, como exemplo, uma imagem da janela do R Studio em que foram obtidos estes resultados). Esta representação visual talvez seja útil para observar que, sendo a expressão do AG híbrido cumulativamente melhor a determinar o valor aproximado das opções, as previsões por ela realizadas são mais conservadoras que as dos dois outros modelos. As variações bruscas dos preços reais não são acompanhadas por picos altos ou declives acentuados dos preços determinados pela expressão do AG híbrido.

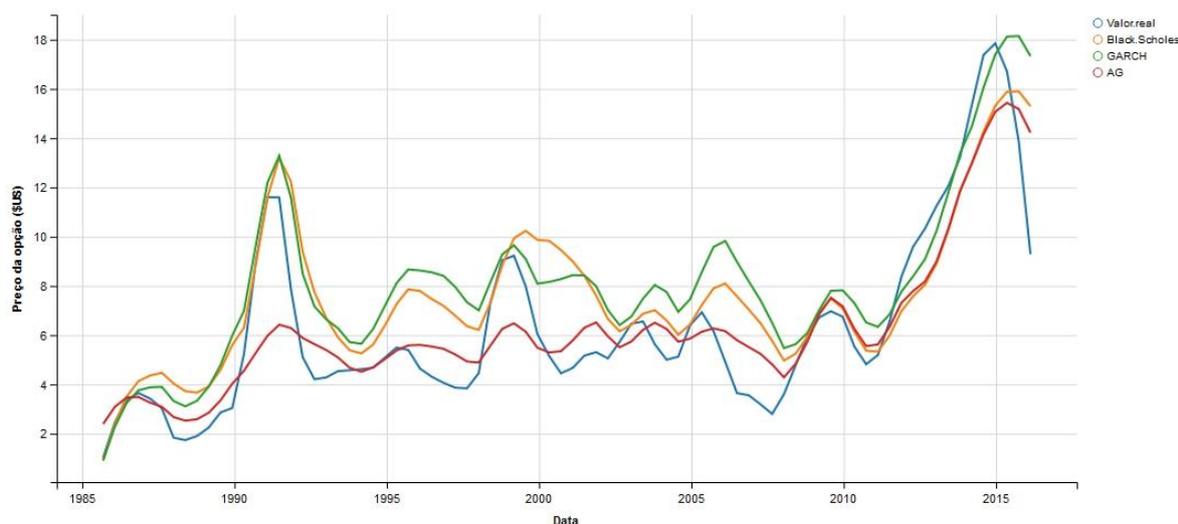


Figura 3.6: evolução do preço das opções de compra das ações da AmGen, do seu valor real (azul) e do seu valor calculado através da equação de Black-Scholes (laranja), do modelo GARCH (1, 1) (verde) e do algoritmo genético híbrido (vermelho).

80 simulações foram feitas do AGh sobre as ações da AmGen fazendo variar o número de gerações (entre 5 e 500), o número de indivíduos máximo na população (entre 10 e 500) e o número de indivíduos mantidos na população para gerar a descendência (entre 5 e 30); as suficientes para determinar a correlação entre estes parâmetros e o desempenho dos indivíduos gerados, assim como a relação entre o tempo e o número total de indivíduos gerados numa simulação.

A correlação entre o número de gerações e o valor de desempenho do melhor indivíduo encontrado pelo algoritmo (0.402) e a correlação entre o número de indivíduos mantidos na população e o valor de desempenho (0.475), são notoriamente maiores que a correlação entre o número de indivíduos gerados por geração e o valor de desempenho (0.195). Tal pode indicar que,

para obter uma boa expressão mais rapidamente durante a aplicação do AG híbrido, é mais vantajoso aumentar o número de gerações e o número de indivíduos mantidos no final de cada uma que aumentar o número máximo de indivíduos de cada geração.

O valor de desempenho é claramente dependente do número de indivíduos produzidos durante a simulação do AG. A Figura 3.7 ilustra justamente este facto, sendo observável que, acima da geração de 2000 indivíduos, não existe nenhum valor de desempenho abaixo de 0.94.

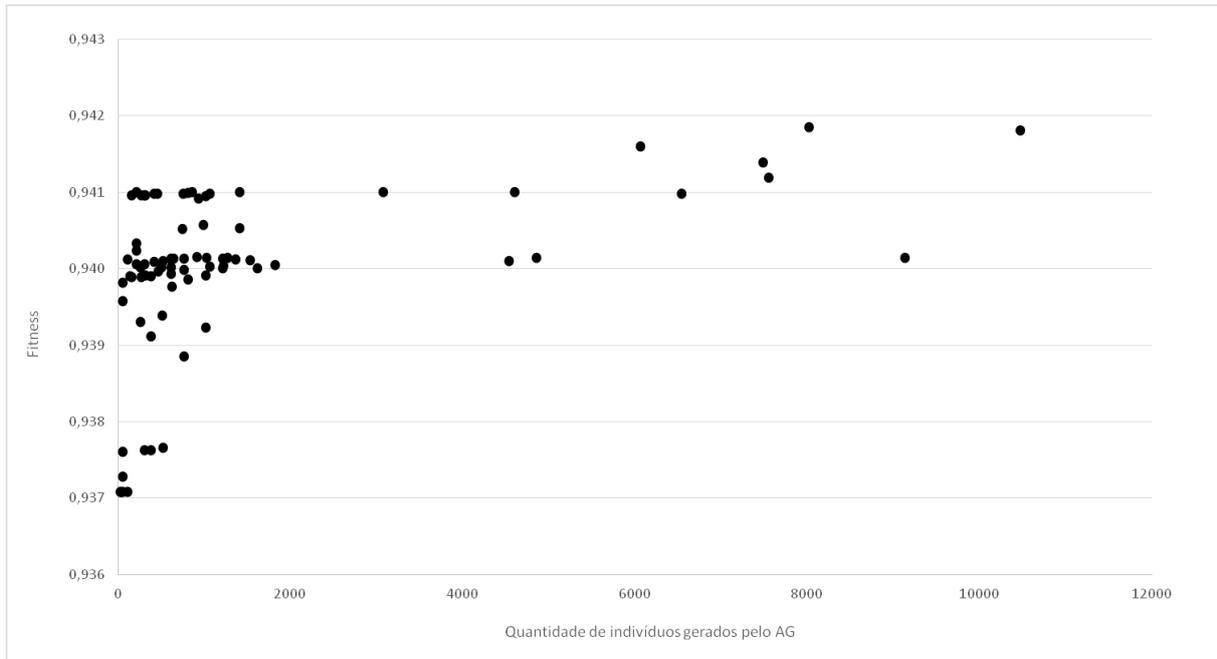


Figura 3.7: variação do valor de desempenho do melhor indivíduo gerado pelo AG híbrido em função da quantidade de indivíduos gerados durante a simulação.

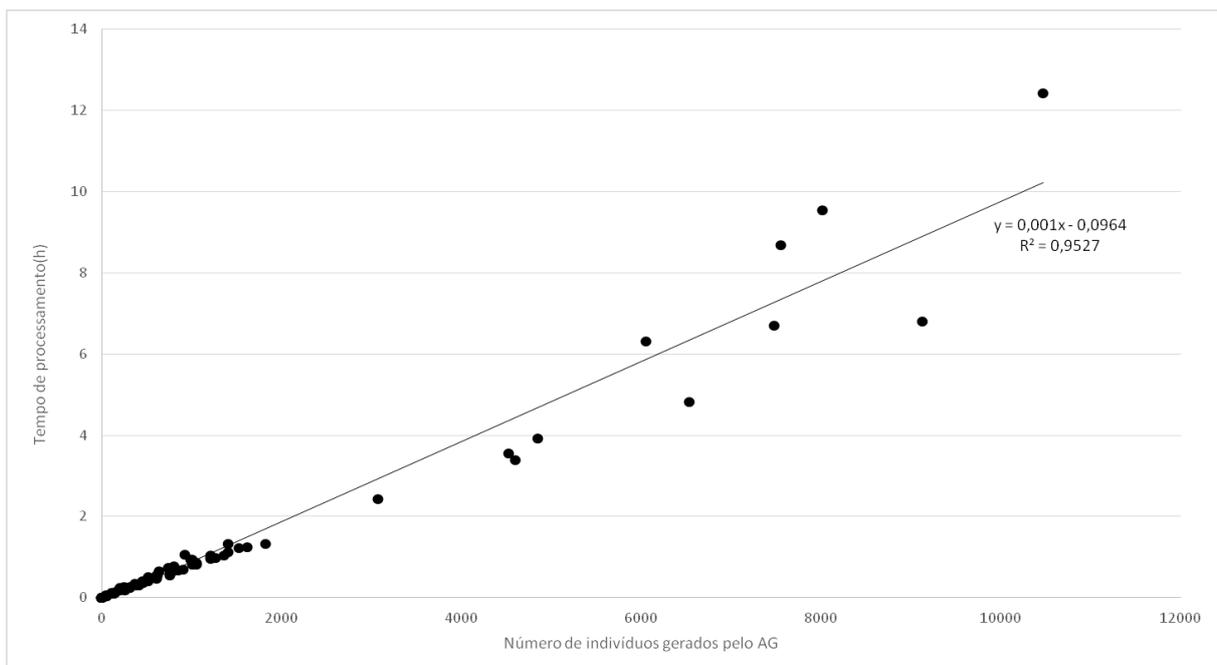


Figura 3.8: variação do tempo de processamento em função do número total de indivíduos gerados pelo algoritmo genético híbrido.

A Figura 3.8 mostra como é aproximadamente linear a variação do tempo de processamento com o número total de indivíduos gerados pelo AG híbrido, aumentando, contudo, a variância dos valores para um número total maior de indivíduos gerados.

Para suportar as potencialidades do algoritmo genético híbrido, foram feitos testes a outros conjuntos de dados de diferentes ações. Os próximos resultados são os gerados para as ações da Apple (com mais de 8540 observações).

A Equação 3.7 foi a obtida pelo AGh (após 7.15 h de processamento), simulado com 175 gerações, com populações máximas de 50 indivíduos e descendência gerada por 15 indivíduos de cada geração anterior. A Figura 3.9 ilustra o comportamento da expressão obtida face aos modelos da equação de Black-Scholes e GARCH (1, 1).

$$c = \frac{a_0}{M} - \frac{\sigma}{\Delta} \times 0.9772499 - \frac{2\sigma}{b_1} \times \Phi(v) - 2 \times \Phi(a_1) - (S r + 2) \times \Phi(\log R) - S r$$

$$+ r \pi^{(r a_0)} + 2 r + r \pi^{(\sigma a_0^2)} + r \pi^{(a_0)} + \pi^{(v \sigma a_0)} + 2^{(v \sigma a_0)} + 2$$

$$+ K^{(P \sigma a_0)} + S \times \Phi(d_1) - K \exp(-T^* \log R) \Phi(d_2)$$

Equação 3.7

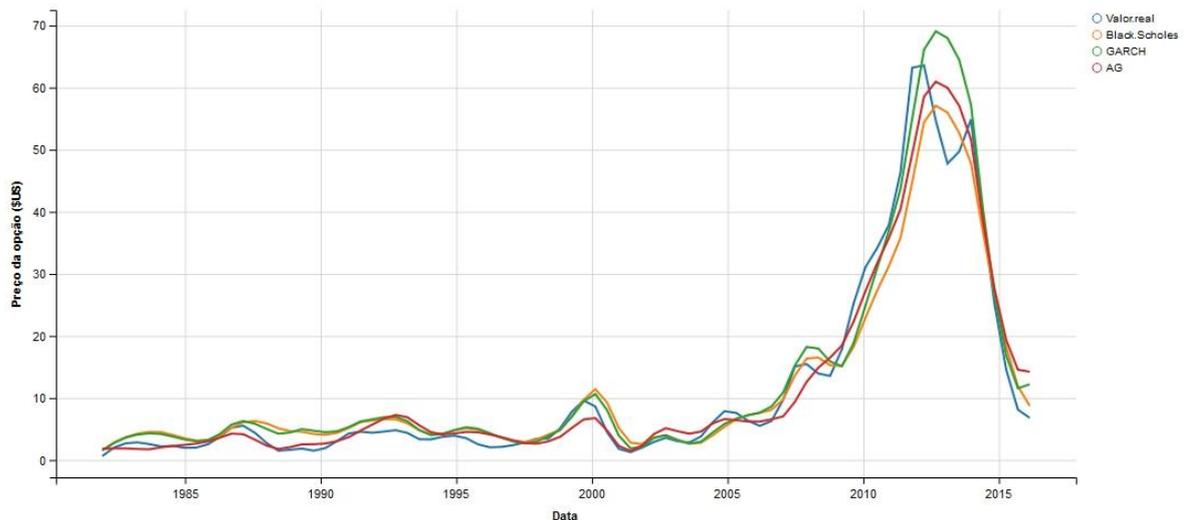


Figura 3.9: evolução do preço das opções de compra das ações da Apple, do seu valor real (azul) e do seu valor calculado através da equação de Black-Scholes (laranja), do modelo GARCH (1, 1) (verde) e do algoritmo genético híbrido (vermelho).

Apesar de a expressão desenvolvida pelo AGh ser melhor que a dos outros dois modelos para determinar o preço das opções, um facto indicado pelas respetivas medidas de desempenho – 0.8714336 (AGh); 0.8694478 (BS); e 0.8673835 (GARCH) –, neste caso, a medida do resíduo médio da expressão do AGh é só 4.68 % menor que a média dos resíduos médios dos outros modelos.

Além dos resultados acima apresentados, o algoritmo genético híbrido foi também testado em conjuntos de dados de outras ações. A Tabela 3.4 resume os resultados obtidos para essas ações, apresentando o melhor indivíduo encontrado e o seu desempenho face aos valores determinados para a equação de Black-Scholes e o modelo GARCH (1, 1). Tendo sido realizadas várias simulações para cada ação, os resultados apresentados são os melhores resultados obtidos entre várias simulações. Devido ao elevado tempo de computação necessário para obter resultados (aproximadamente 3.3 s por indivíduo gerado), que é o principal constrangimento à aplicação deste

método, não foi possível realizar tantas simulações para as outras ações como foi feito para a as ações da AmGen.

Tabela 3.4: resultados da aplicação do AGh para diversas ações.

Ação	Número de observações	Desempenho da eq. de Black-Scholes	Desempenho do modelo GARCH (1, 1)	Desempenho do melhor ind. gerado pelo AGh	Geração do melhor ind.	Número de gerações	População máxima de cada geração	Número de indivíduos mantidos entre gerações	Tempo de processamento (s)	Melhoria do desempenho obtida da eq. BS para o AGh	Melhoria do desempenho obtida do GARCH para o AGh
AmGen	7614	0.9377428	0.9364521	0.9418412	497	500	30	15	34346	12.23%	14.46%
Apple	8565	0.8696329	0.867569	0.8716453	174	175	50	15	25688	4.68%	4.85%
Amazon	4441	0.7726863	0.7714513	0.7734449	1	175	50	15	9618	0.13%	-1.17%
Accenture	3393	0.9526715	0.9517335	0.9528280	3	300	100	20	34761	-0.05%	0.110%
Boeing	13266	0.9613783	0.9609192	0.9654529	4	175	50	15	48132	14.03%	14.09%
CocaCola	7061	0.9791061	0.9763827	0.9800270	7	180	75	20	16475	4.64%	0.00%
Bank of America	7181	0.9627126	0.9529265	0.9650016	19	175	50	15	22195	11.42%	26.06%

A disparidade dos valores do desempenho do AGh face aos modelos de Black-Scholes e GARCH (1, 1) apresentados para diferentes tipos de ações é potencialmente um reflexo da diferença de características do processo estocástico de cada ação.

Poder-se-á argumentar que a diferença dos parâmetros de aplicação do AGh para cada ação, nomeadamente o número de gerações, o número de indivíduos da população e o número de indivíduos transferidos de uma população para a seguinte, poderá também estar relacionado com a melhoria da prestação do algoritmo face à equação de Black-Scholes e ao modelo GARCH (1, 1). No entanto, como mostra a Figura 3.7 a medida de desempenho do melhor indivíduo é assintótica face à quantidade de indivíduos gerados numa simulação do AGh. Desta forma, considera-se que a quantidade de indivíduos gerados em cada um dos resultados apresentados na Tabela 3.4 é suficiente para alcançar essa estabilidade assintótica.

Como mencionado por Jarrow & Kwok, 2015, a modelação de processos estocásticos não deve ser feita cegamente. As características da distribuição dos valores das ações, ou da volatilidade, devem ser analisadas e, com base em testes estatísticos, avaliar a existência de efeitos como a heteroscedasticidade, curtose e assimetria. De facto, uma ação pode justamente apresentar um comportamento concordante com as premissas admitidas pela equação de Black-Scholes. Chidambaran, 2010 mostrou como o algoritmo genético pode aprender a equação de Black-Scholes se lhe forem imputados dados simulados segundo esses mesmo pressupostos.

Neste caso não foi feito nenhum teste para classificar o tipo de processo estocástico que caracteriza as ações analisadas. No entanto, por exemplo, é possível observar quão desadequado é o modelo GARCH (1, 1) face à equação de Black-Scholes e ao AGh para determinar o preço das opções sobre as ações Bank of America. Para estas observações, em que o AGh mostrou-se particularmente bem-adaptado a aproximar os valores calculados aos reais (11.42% melhor que a equação de Black-Scholes), enquanto o modelo GARCH (1, 1) determina valores mais de duas vezes mais afastados (26.06%) que a equação de Black-Scholes.

O AGh mostrou-se apto a convergir para boas soluções, capaz de determinar expressões matemáticas melhores que os dois modelos utilizados como base de comparação a calcular o valor das opções em metade dos conjuntos de observações de metade das ações analisadas.

Com base nos resultados apresentados na Tabela 3.4 pode ser notada uma relação entre o número de observações e a capacidade do AGh para gerar uma boa solução. Note-se que, para as ações AmGen, Apple, Boeing e Bank of America, todas com mais de 7000 observações, as expressões geradas pelo AGh mostraram uma performance significativamente melhor que a equação de Black-Scholes e o modelo GARCH (1, 1). No caso das ações da Boeing, com mais de 13000 observações, o AGh encontrou uma solução boa na quarta geração.

Contudo, a quantidade de resultados aqui apresentados não é suficiente para inferir uma correlação significativa entre o número de observações no conjunto de dados de treino e a performance do AGh.

Pode, sim, afirmar-se que o AGh nunca fornecerá resultados piores que a equação de Black-Scholes, já que esta faz parte das populações geradas pelo AGh, mas que poderá ser menos capaz de sobrepujar o modelo GARCH (1, 1). Resta também analisar as potencialidades do AGh face aos modelos mais desenvolvidos, como os mencionados no capítulo 1.3, e, possivelmente, integrar no AGh esses mesmos modelos.

4 Conclusões

A aplicação de algoritmos metaheurísticos no campo da engenharia financeira ainda não é comum quando comparada à utilização que é dada aos métodos matemáticos de análise de processos estocásticos com fortes bases teóricas e com elevadas ordens de parametrização. Não obstante, as potencialidades que os algoritmos metaheurísticos auferem nesta área são notórias. Além de possuírem a capacidade de encontrar resultados mais próximos dos reais, que foi o objetivo deste estudo e tendo ficado comprovada a sua prestação bem-sucedida, podem ser utilizados para analisar e inferir comportamentos estatísticos a partir dos resultados obtidos. Aludimos a uma possibilidade já anteriormente referida e agora concluída de analisar as expressões matemáticas geradas por este algoritmo genético híbrido para identificar quais são os termos que, pela frequência da sua ocorrência ou pela sua eliminação recorrente dos genes das populações, são relevantes para explicar o comportamento dos valores observados ou que são prejudiciais à pesquisa por esses resultados. Este tipo de análise requer uma maior base de resultados para se tornar estatisticamente significativa.

Consideramos que este será um dos principais contributos da utilização metódica deste tipo de modelos; será também um curioso contorno à elegância da dedução de um modelo matemático a partir de teorias e ideias sobre o comportamento de um processo, para obter empiricamente fórmulas para arquétipos estocásticos.

Regressando à fundamental implementação do algoritmo genético híbrido, não se pode deixar de referir que este é um método que pode ser otimizado *ad infinitum*: A geração aleatória de indivíduos pode sempre ser melhorada, redefinindo (ou removendo-as de todo) as regras para a formação de expressões matemáticas aleatórias; os parâmetros, funções matemáticas e operações consideradas na formação das expressões pode ser também ela alargada; mais e mais diversas operações genéticas devem ser implementadas (aqui, certamente não foram utilizadas mimetizações de todos os mecanismos genéticos de um organismo biológico); é possível e provável que exista uma medida de desempenho mais adequada que aquela que foi implementada neste estudo; e, por fim, os parâmetros de controlo do algoritmo são sempre passíveis de ser otimizados.

Neste caso, e na maior parte dos estudos realizados sobre métodos para determinação do preço de opções, a aproximação aos valores reais observados é feita utilizando os dados em bruto. Como se pôde verificar estes dados têm um ruído associado (algo que é característico de todos os processos estocásticos). Pode ser vantajoso o pré-tratamento dos conjuntos de observações de alta frequência filtrando esse ruído e facilitando a obtenção e parametrização dos modelos.

Por fim, o maior desenvolvimento que se poderá fazer no estudo de processos estocásticos deste tipo será talvez o de considerar várias variáveis independentes e entrar numa análise multivariada. Todos os métodos referidos neste trabalho, incluindo o algoritmo genético, são univariados, dependem essencialmente do valor da ação subjacente e nada mais, já que todas as restantes variáveis são determinadas a partir desse valor e os restantes parâmetros são fixos, definidos contratualmente ou estipulados exteriormente e mantidos fixos na previsão dos valores futuros (como a taxa de juro sem risco). Poderiam ser consideradas outras variáveis como, por exemplo,

rendimentos *per capita* numa dada região ou outros indicadores sociais, evolução dos preços de certas *commodities* como o petróleo ou o ouro, valores das ações noutros mercados, entre muitas outras variáveis.

Os métodos utilizados na determinação de opções financeiras são muitos e variados. Uma análise metódica, estruturada e comparativa é uma soberana necessidade para determinar qual o método mais adequado em que situação e em que condições.

Apesar da simplicidade das ideias por trás da aplicação dos algoritmos baseados em fenómenos biológicos, e sendo a sua implementação também relativamente simples se se mantiver em mente os princípios básicos desses mesmos fenómenos que se tentam mimetizar, o trato computacional é constrangido pelo volume de operações necessárias à sua aplicação. O resultado são tempos de computação muito longos e, por isso, dissuasivos face a outros métodos. A implementação de funções asséssórias e pré-tratamentos de dados adequados podem reduzir esses tempos de computação.

O tempo associado à modelação utilizando algoritmos metaheurísticos é muito elevado se se não tiver acesso a poder computacional apropriado. Se este pode ser um método adequado para determinar os preços de opções reais, cujos contratos são celebrados tendo em vista tempos de maturidade que vulgarmente atingem os três meses e raramente descem abaixo de um mês, certamente não será adequado para tentar prever a evolução dos valores diários das ações, por exemplo, e muito menos dentro do espaço de um dia se não existirem registos de observações com a frequência intra-diária necessária.

A quantidade e a qualidade dos dados de origem influenciam não só a capacidade de um método para gerar bons resultados, mas a escolha do método mais adequado para atingir um determinado objetivo. A recolha e a disponibilidade dos dados, para além da observância da sua qualidade e quantidade, é muitas vezes o que mais dificulta a análise de um processo estocástico. Fortuitamente, as ferramentas computacionais mais recentes de coleção de dados têm vindo a providenciar grandes evoluções neste sentido.

Os algoritmos metaheurísticos continuam a mostrar-se aptos para abordar os problemas com conjuntos de dados grandes associados. A sua evolução é contínua, e o espaço para surgirem novos algoritmos inspirados em fenómenos naturais ainda existe; provavelmente nunca se esgotará.

Bibliografia

- Abid, F., Abdelmalek, W., & Ben Hamida, S. (2012). Dynamic Hedging Using Generated Genetic Programming Implied Volatility. Em S. Ventura, *Genetic Programming - New Approaches and Successful Applications* (pp. 141-172). doi:10.5772/48148
- Andersen, T., Bondarenko, O., Todorov, V., & Tauchen, G. (2015). The fine structure of equity-index option dynamics. *Journal of Econometrics*, 187, 532-546.
- Appadoo, S., & Thavaneswaran, A. (2013). Recent developments in fuzzy sets approach in option pricing. *Journal of Mathematical Finance*, 3, 312-322.
- Arismendi, J., & De Genaro, A. (2016). A Monte Carlo multi-asset option pricing approximation for general stochastic processes. *Chaos, Solitons and Fractals*, 000, 1-21.
- Asai, M., & McAleer, M. (2015). Leverage and feedback effects on multifactor Wishart stochastic volatility for option pricing. *Journal of Econometrics*, 187, 436-446.
- Baldovin, F., Caporin, M., Caraglio, M., Stella, A., & Zamparo, M. (2015). Option pricing with non-Gaussian scaling and infinite-state switching volatility. *Journal of Econometrics*, 187, 486-497.
- Bandi, C., & Bertsimas, D. (2014). Robust option pricing. *European Journal of Operational Research*, 239, 842-853.
- Bates, D. (1996). Jumps and stochastic volatility: exchange rate processes implicit in Deutsche Mark options. *The Review of Financial Studies*, 9 (1), 69-107.
- Black, F., & Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81, 637 - 654.
- Board of Governors of the Federal Reserve System. (21 de março de 2016). Obtido de FRB: H.15 Release--Selected Interest Rates--Historical Data: <http://www.federalreserve.gov/releases/h15/data.htm>
- Board of Governors of the Federal Reserve System. (21 de março de 2016). *Selected Interest Rates (Daily) - H.15*. Obtido de FRB: H.15 Release--Selected Interest Rates--Historical Data: <http://www.federalreserve.gov/datadownload/Output.aspx?rel=H15&series=646250c87b1afd04cc6774796fc0cec8&lastObs=&from=&to=&filetype=csv&label=include&layout=seriescolumn>
- Bollerslev, T., & Todorov, V. (2014). Time-varying jump tails. *Journal of Econometrics*, 183, 168-180.
- Byun, S., Jeon, B., Min, B., & Toon, S.-J. (2015). The role of the variance premium in jump-GARCH option pricing models. *Journal of Banking and Finance*, 59, 38-56.
- Calvet, L., Fearnley, M., Fischer, A., & Leippold, M. (2015). What is beneath the surface? Option pricing with multifrequency latent states. *Journal of Econometrics*, 187, 498-511.
- Chidambaran, N. (2010). Genetic Programming for Option Pricing. Em C.-F. Lee, & e. al, *Handbook of Quantitative Finance and Risk Management* (pp. 1607-1615). Springer Science + Business Media.
- Christoffersen, P., Heston, S., & Jacobs, K. (2013). Capturing option anomalies with a variance-dependent kernel. *Review of Financial Studies*, 26, 1962-2006.
- Christoffersen, P., Jacobs, K., Ornathanalai, C., & Wang, Y. (2008). Option valuation with long-run and short-run volatility components. *Journal of Financial Economics*, 90, 272-297.

- Coppex, F. (2009). *Solving the Black-Scholes equation: a demystification*. Obtido de <http://www.francoiscoppex.com>
- Corsi, F., Fusari, N., & La Vecchia, D. (2013). Realizing smiles: Options pricing with realized volatility. *Journal of Financial Economics*, 107, 284-304.
- Cox, J., Ingersoll, J., & Ross, S. (1985). A theory of term structure of interest rates. *Econometrica*, 53 (2), 385-408.
- Cox, J., Ross, S., & Rubinstein, M. (1979). Option pricing: a simplified approach. *Journal of Financial Economics*, 7 (3), 229-263.
- Da Fonseca, J., Gnoatto, A., & Grasselli, M. (2015). Analytic pricing of volatility-equity options within Wishart-based stochastic volatility models. *Operations Research Letters*, 43, 601-607.
- Date, P., & Islyayev, S. (2015). A fast calibrating volatility model for option pricing. *European Journal of Operational Research*, 243, 599-606.
- Duan, J.-C. (janeiro de 1995). The GARCH option pricing model. *Mathematical Finance*, 5 (1), 13-32.
- Engle, R., & Ng, V. (1993). Measuring and testing the impact of news on volatility. *The Journal of Finance*, 48 (5), 1749-1778.
- Gong, X., & Zhuang, X. (2016). Option pricing for stochastic volatility model with infinite activity Lévy jumps. *Physica A*, 455, 1-10.
- Gourieroux, C., & Monfort, A. (2015). Pricing with finite dimensional dependence. *Journal of Economics*, 187, 408-417.
- Gradojevic, N., Gençay, R., & Kukolj, R. (2009). Option pricing with modular neural networks. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 20 (4), 626-637.
- Heston, S. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *The Review of Financial Studies*, 6 (2), 327-343.
- Hull, J., & White, A. (1990). Pricing interest-rate derivative securities. *The Review of Financial Studies*, 3 (4), 573-592.
- Jarrow, R., & Kwok, S. (2015). Specification tests of calibrated option pricing models. *Journal of Econometrics*, 187, 397-414.
- Kim, Y., Lee, J., & Park, J. (2015). Quanto option pricing in the presence of fat tails and asymmetric dependence. *Journal of Econometrics*, 187, 512-520.
- Kleinert, H., & Korbel, J. (2016). Option pricing beyond Black-Scholes based on double-fractional diffusion. *Physica A*, 449, 200-214.
- Koza, J. R. (1992). *Genetic Programming: On the Programming of Computers by means of Natural Selection*. MIT Press.
- Majewski, A., Bormetti, G., & Corsi, F. (2015). Smile from the past: A general option pricing framework with multiple volatility and leverage component. *Journal of Econometrics*, 187, 521-531.
- Mandelbrot, B., & Van Ness, J. (1968). Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *Society for Industrial and Applied Mathematics Review*, 10, 422-437.
- Merton, R. C. (1976). Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous. *Journal of Financial Economics*, 3, 125-144.

- Paolella, M., & Polak, P. (2015). COMFORT: A common market factor non-Gaussian returns model. *Journal of Econometrics*, 187, 593-605.
- Poli, R., Langdon, W., McPhee, N., & Koza, J. (. (2008). *A field guide to genetic programming*. Publicado via <http://lulu.com> e disponível livremente em. Obtido de <http://www.gp-field-guide.org.uk>
- Rombouts, J., & Stentoft, L. (2015). Option pricing with asymmetric heteroskedastic normal mixture models. *International Journal of Forecasting*, 31, 635-650.
- Rubinstein, M. (1983). Displaced diffusion option pricing. *Journal of Finance*, 38 (1), 213-217.
- Rubinstein, M. (julho de 1994). Implied binomial trees. *Journal of Finance*, 49 (3), 771-818.
- Tsay, R. (2010). *Analysis of Financial Time Series* (Terceira ed.). Wiley.
- Vašíček, O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 5, 177-188.
- Yahoo Finance*. (21 de março de 2016). Obtido de AMGN Historical Prices: <http://finance.yahoo.com/q/hp?s=AMGN+Historical+Prices>
- Yin, Z., Brabazon, A., & O'Sullivan, C. (2007). Adaptive Genetic Programming for Option Pricing. *GECCO*, (pp. 2588-2594).

Anexo 1. Dedução da equação de Black-Scholes

A dedução da equação de Black-Scholes foi feita a partir de Black & Scholes, 1973, com o auxílio de várias obras dedicadas ao tratamento matemático de processos estocásticos e equações diferenciais como por exemplo Tsay, 2010.

Seja $W(S, t)$ o valor da opção dependente do preço do ativo subjacente, e.g. ação, ou stock (S), e do tempo (t). O número de opções que devem ser vendidas a descoberto para cada ativo em posição longa, com o objetivo de criar uma posição de cobertura de risco, é descrito pela Equação 4.1.

$$\text{número de opções vendidas} = \frac{1}{\frac{\partial W(S, t)}{\partial S}} \quad \text{Equação 4.1}$$

O ratio entre a variação do valor da opção e o preço da ação, quando pequeno, mostra que o valor desta posição de cobertura de risco não depende do preço da ação. Ou seja, quando o preço da ação varia em uma quantidade ΔS , o preço da opção varia em $\frac{\partial W(S, t)}{\partial S} \Delta S$. Assim, a quantidade de opções dadas pela equação acima variará em ΔS . Assim, o princípio em que assenta a derivação da equação de Black-Scholes é o princípio em que uma variação no valor de uma posição curta (um investidor que se coloque numa posição vendedora estará a abrir uma posição curta) será aproximadamente compensada pela variação no valor de uma posição longa (caso em que o investidor será o comprador de opções, abrindo uma posição longa) na venda de $1/\frac{\partial W(S, t)}{\partial S}$ opções. Considerando que o sentido da variação no valor da participação é independente do sentido da variação do valor das ações, a covariância entre o retorno proveniente da participação e o retorno da venda das ações será aproximadamente nulo.

Numa posição de cobertura de risco, isto é, numa posição em que a posição curta é ajustada continuamente, o risco é aproximadamente nulo. Para manter tal posição em relação ao risco, para uma ação numa posição longa terão de ser mantidas $1/\frac{\partial W(S, t)}{\partial S}$ opções numa posição curta. Considerando esta premissa, o valor da equidade (*equity*) na posição pode ser determinado através da Equação 4.2.

$$S - \frac{W(S, t)}{\frac{\partial W(S, t)}{\partial S}} \quad \text{Equação 4.2}$$

Assim, a variação no valor da equidade é dado pela Equação 4.3.

$$\Delta S - \frac{\Delta W(S, t)}{\frac{\partial W(S, t)}{\partial S}} \quad \text{Equação 4.3}$$

Onde $\Delta W(S, t)$ é $W(S + \Delta S, t + \Delta t) - W(S, t)$. Expandido ΔW :

$$\Delta W = \frac{\partial W}{\partial S} \Delta S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \Delta t + \frac{\partial W}{\partial t} \Delta t \quad \text{Equação 4.4}$$

Onde σ é a volatilidade – um resultado do cálculo estocástico e da suposição de que a posição de cobertura de risco é ajustada continuamente; neste caso, pode-se dizer que a variância é também uma medida do risco. Substituindo a Equação 4.4 na Equação 4.3 e simplificando o resultado, obtém-se uma nova expressão para a variação do valor da equidade:

$$-\left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 + \frac{\partial W}{\partial t}\right) \frac{\Delta t}{\frac{\partial W}{\partial S}} \quad \text{Equação 4.5}$$

Outro resultado derivado da manutenção de uma posição de cobertura de risco é a de que o retorno da *equity* deve ser igual à taxa de juro sem risco no tempo de maturidade da opção ($r\Delta t$). Isto significa que o resultado da Equação 4.5 – a variação da *equity* – tem de ser igual ao resultado da Equação 4.2 – o valor da *equity* – multiplicado por $r\Delta t$:

$$-\left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 + \frac{\partial W}{\partial t}\right) \frac{\Delta t}{\frac{\partial W}{\partial S}} = \left(S - \frac{W}{\frac{\partial W}{\partial S}}\right) r\Delta t \quad \text{Equação 4.6}$$

Consequentemente, a partir da equação acima, pode ser definida uma equação diferencial (duas vezes diferenciável) para o valor da opção. A Equação 4.7 assim definida é uma equação de Cauchy-Euler, isto é, uma equação parabólica linear que pode então ser resolvida através de uma mudança de variáveis e depois convertida numa equação parabólica generalizada da forma expressa pela Equação 4.8. O objetivo de transformar a equação de Black-Scholes numa equação parabólica é o de assim poder depois reduzi-la a uma equação de difusão e a partir daí resolvida.

$$\frac{\partial W}{\partial t} = Wr - S \frac{\partial W}{\partial S} r - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \quad \text{Equação 4.7}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a \frac{\partial w}{\partial x} + bw \quad \text{Equação 4.8}$$

Note-se que esta equação é somente válida para $S > 0$ e para $t \in [0, T]$. Assim, para resolver esta equação, é necessário considerar os constrangimentos estabelecidos pelo preço de exercício (K) e a data da maturidade (T). Quando a opção atinge a sua data de maturidade, ou data de vencimento, o valor da opção deverá ser igual ao preço do ativo subjacente (S) subtraindo o seu preço de exercício ou nulo, caso contrário. Matematicamente, estes limites podem ser descritos da seguinte maneira:

$$W(S, T) = \begin{cases} S - K & , S \geq K \\ 0 & , S < K \end{cases} \quad \text{Equação 4.9}$$

Para resolver a equação acima descrita é considerado que a taxa de juro sem risco (r) e a variância, ou volatilidade, (σ) são constantes. Assim, realizando a seguinte mudança de variáveis (Coppex, 2009):

$$S = Ke^x \Leftrightarrow x = \ln \frac{S}{K} \quad \text{Equação 4.10}$$

$$W(S, t) = Kw(x, \tau) \quad \text{Equação 4.11}$$

$$\tau = (T - t) \frac{\sigma^2}{2} \quad \text{Equação 4.12}$$

As derivadas parciais do valor da opção (W), referidas na Equação 4.7, podem então ser reescritas como derivadas parciais do valor resultante da mudança de variáveis (w) e resolvidas utilizando a regra da derivação por partes.

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (Kw(x, \tau)) = K \frac{\partial w}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = K \frac{\partial w}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial t} \left((T - t) \frac{\sigma^2}{2} \right) = -\frac{\sigma^2}{2} K \frac{\partial w}{\partial \tau} \quad \text{Equação 4.13}$$

$$\frac{\partial W}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial S} (Kw(x, \tau)) = K \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S} = K \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial}{\partial S} \left(\ln \frac{S}{K} \right) = \frac{K}{S} \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{Equação 4.14}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial S^2} &= \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{K}{S} \frac{\partial w}{\partial x} \right) = -\frac{K}{S^2} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{K}{S} \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = -\frac{K}{S^2} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{K}{S} \frac{\partial x}{\partial S} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \\ &= -\frac{K}{S^2} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{K}{S^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{aligned} \quad \text{Equação 4.15}$$

Substituindo o resultado das derivadas parciais do valor da opção em função das novas variáveis na Equação 4.7 e rearranjando o resultado (da Equação 4.16) encontra-se a equação parabólica atrás mencionada (Equação 4.17).

$$-\frac{\sigma^2}{2} K \frac{\partial w}{\partial \tau} = Kwr - S \frac{K}{S} \frac{\partial w}{\partial x} r - \frac{1}{2} \left(-\frac{K}{S^2} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{K}{S^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \sigma^2 S^2 \quad \text{Equação 4.16}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1 \right) \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{2r}{\sigma^2} w \quad \text{Equação 4.17}$$

Por comparação com a Equação 4.8 (da forma geral da equação parabólica) podem-se então definir os parâmetros da equação parabólica.

$$a = \frac{2r}{\sigma^2} - 1 \quad \text{Equação 4.18}$$

$$b = -(a + 1) \quad \text{Equação 4.19}$$

A solução para a equação parabólica é da forma:

$$w(x, \tau) = f(\tau)g(x)h(x, \tau) \quad \text{Equação 4.20}$$

É então necessário recalculer as derivadas parciais (existentes na Equação 4.17) de acordo com as novas funções originárias da solução geral da equação parabólica.

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial f}{\partial \tau} gh + fg \frac{\partial h}{\partial \tau} \quad \text{Equação 4.21}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = f \frac{\partial g}{\partial x} h + fg \frac{\partial h}{\partial x} \quad \text{Equação 4.22}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial S} \left(f \frac{\partial g}{\partial x} h + fg \frac{\partial h}{\partial x} \right) = f \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} h + 2f \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + fg \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad \text{Equação 4.23}$$

Substituindo o resultado das novas derivadas parciais na Equação 4.17, e rearranjando o resultado em termos de a para simplificação (v. Equação 4.18 e Equação 4.19).

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} gh + fg \frac{\partial h}{\partial \tau} = f \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} h + 2f \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + fg \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + a \left(f \frac{\partial g}{\partial x} h + fg \frac{\partial h}{\partial x} \right) + b f g h \quad \text{Equação 4.24}$$

A Equação 4.24 será satisfeita se as funções f e g forem da forma:

$$f(\tau) = c_1 \exp[\hat{f}(\tau)] \quad , c_1 \in \mathbb{R} \quad \text{Equação 4.25}$$

$$g(x) = c_2 \exp[\hat{g}(x)] \quad , c_2 \in \mathbb{R} \quad \text{Equação 4.26}$$

Consequentemente, as derivadas parciais das duas funções serão:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = f \frac{\partial \hat{f}}{\partial \tau} \quad \text{Equação 4.27}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = g \frac{\partial \hat{g}}{\partial x} \quad \text{Equação 4.28}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = g \frac{\partial^2 \hat{g}}{\partial x^2} + g \left(\frac{\partial \hat{g}}{\partial x} \right)^2 \quad \text{Equação 4.29}$$

Substituindo as derivadas parciais acima definidas na Equação 4.24 e rearranjando o resultado em ordem a h , é obtida a Equação 4.30.

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial h}{\partial x} \left(2 \frac{\partial \hat{g}}{\partial x} + a \right) + h \left[-\frac{\partial \hat{f}}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 \hat{g}}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial \hat{g}}{\partial x} \right)^2 + a \frac{\partial \hat{g}}{\partial x} + b \right] \quad \text{Equação 4.30}$$

Esta equação será uma equação de difusão se os termos sombreados forem nulos:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \frac{\partial \hat{g}}{\partial x} + a = 0 \\ -\frac{\partial \hat{f}}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 \hat{g}}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial \hat{g}}{\partial x}\right)^2 + a \frac{\partial \hat{g}}{\partial x} + b = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \hat{g}}{\partial x} = -\frac{a}{2} \\ \frac{\partial \hat{f}}{\partial \tau} = -\frac{a^2}{4} + b \end{array} \right. \quad \text{Equação 4.31}$$

$$\frac{\partial \hat{g}}{\partial x} = -\frac{a}{2} \Rightarrow \hat{g}(x) = -\frac{a}{2}x + c_3, \quad c_3 \in \mathbb{R} \quad \text{Equação 4.32}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \tau} = -\frac{a^2}{4} + b &\Rightarrow \hat{f}(\tau) = \left(b - \frac{a^2}{4}\right)\tau + c_4 \xrightarrow{\text{Equação 4.19}} \\ \xrightarrow{\text{Equação 4.19}} \hat{f}(\tau) &= -\left(\frac{1}{4}a^2 + a + 1\right)\tau + c_4, \quad c_4 \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad \text{Equação 4.33}$$

Assim, a condição enunciada acima permite recuperar o valor das funções \hat{g} e \hat{f} . Este resultado é então utilizado para determinar as funções da solução da equação parabólica (v. Equação 4.20).

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\tau) = \exp\left[-\left(\frac{1}{4}a^2 + a + 1\right)\tau\right] \\ g(x) = \exp\left[-\frac{a}{2}x\right] \\ w(x, \tau) = \exp\left[-\left(\frac{1}{4}a^2 + a + 1\right)\tau\right] \exp\left[-\frac{a}{2}x\right] h(x, \tau) \end{array} \right. \quad \text{Equação 4.34}$$

Substituindo este resultado no valor da opção como expresso na Equação 4.11 obtém-se a Equação 4.35. Assim, a equação de Black-Scholes, transformada na sua nova forma de equação de difusão (v. Equação 4.39) e com as mudanças de variável anteriormente realizadas, pode ser resumida da seguinte forma:

$$W(S, t) = K \exp\left[-\left(\frac{1}{4}a^2 + a + 1\right)\tau\right] \exp\left[-\frac{a}{2}x\right] h(x, \tau) \quad \text{Equação 4.35}$$

$$a = \frac{2r}{\sigma^2} - 1 \quad \text{Equação 4.36}$$

$$\tau = (T - t) \frac{\sigma^2}{2}, \quad t \in [0, T] \Rightarrow \tau \in \left[0, T \frac{\sigma^2}{2}\right] \quad \text{Equação 4.37}$$

$$S = Ke^x \Leftrightarrow x = \ln \frac{S}{K}, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{Equação 4.38}$$

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad \text{Equação 4.39}$$

Para resolver a equação de difusão é necessário estabelecer os limites impostos pela condição inicial do contrato da opção: quando o tempo até à maturidade é máximo ($t = T$) então $\tau = 0$. A resolução da equação de difusão pode então ser realizada recorrendo às transformadas de Fourier.

A transformada de Fourier da função h em ordem a x é definida na Equação 4.40.

$$\mathcal{F}(h(x, \tau))(k) = \tilde{h}(k) \quad \text{Equação 4.40}$$

Para encontrar a transformada de Fourier da segunda derivada parcial da função h em ordem a x , é necessário recorrer à propriedade da transformada de Fourier da derivada de ordem n enunciada na Equação 4.41.

$$\mathcal{F}(f^{(n)}(x))(k) = (ik)^n \mathcal{F}(f(x))(k) \quad \text{Equação 4.41}$$

Obtém-se assim a transformada em relação a x da segunda derivada parcial da função h em ordem a x (Equação 4.42) e a transformada da mesma função derivada em ordem a τ (Equação 4.43).

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \xrightarrow{\mathcal{F}_x} (ik)^2 \tilde{h} = -k^2 \tilde{h} \quad \text{Equação 4.42}$$

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} \xrightarrow{\mathcal{F}_x} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tau} \quad \text{Equação 4.43}$$

Reproduzindo agora a Equação 4.39 em termos das transformadas de Fourier dos seus termos obtém-se a Equação 4.44.

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tau} = -k^2 \tilde{h} \quad \text{Equação 4.44}$$

Primitivando ambos os termos em ordem a τ , lembrando a condição inicial ($\tau = 0$), obtém-se a Equação 4.45.

$$\tilde{h}(k, \tau) = \tilde{h}(k, 0)e^{-k^2 \tau} \quad \text{Equação 4.45}$$

Segundo o teorema da convulsão das transformadas de Fourier, a função $\tilde{h}(k, \tau)$ pode ser descrita como a transformada da convulsão de duas funções ou como o produto das transformadas de Fourier dessas duas funções (v. Equação 4.46).

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g) \quad \text{Equação 4.46}$$

Assim, definindo duas novas funções – \tilde{h}_1 e \tilde{h}_2 – como os termos do produto da transformada de Fourier da função \tilde{h} :

$$\left. \begin{array}{l} e^{-k^2 \tau} = \tilde{h}_1 \\ \tilde{h}(k, 0) = \tilde{h}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \tilde{h}(k, \tau) = \tilde{h}_1(k, \tau)\tilde{h}_2(k, \tau) \quad \text{Equação 4.47}$$

E aplicando então a propriedade da convulsão na inversa da transformada de Fourier da função h (v. Equação 4.48), obtém-se esta função descrita como a convulsão de duas funções – h_1 e h_2 (v. Equação 4.49).

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}(\tilde{h}(k, \tau))(x) &= \mathcal{F}^{-1}(\tilde{h}_1(k, \tau))(x)\mathcal{F}^{-1}(\tilde{h}_2(k, \tau))(x) \\ &= \mathcal{F}^{-1}((\tilde{h}_1 * \tilde{h}_2)(k, \tau))(x)\end{aligned}\quad \text{Equação 4.48}$$

$$h(x, \tau) = (h_1 * h_2)(x, \tau) \quad \text{Equação 4.49}$$

Por definição, a convulsão de duas funções produz o seguinte resultado:

$$h(x, \tau) = (h_1 * h_2)(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} h_1(x - \xi, \tau) h_2(\xi, \tau) d\xi \quad \text{Equação 4.50}$$

As transformadas inversas (cuja definição está definida na generalizada Equação 4.51) das funções \tilde{h}_1 e \tilde{h}_2 estão definidas na Equação 4.52 e na Equação 4.53.

$$\mathcal{F}^{-1}(\tilde{f}(k))(x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} \tilde{f}(k) dk \quad \text{Equação 4.51}$$

$$\mathcal{F}^{-1}(\tilde{h}_1(k, \tau))(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} e^{-k^2\tau} dk = \frac{1}{\sqrt{2\tau}} e^{-x^2/4\tau} = h_1(x, \tau) \quad \text{Equação 4.52}$$

$$\mathcal{F}^{-1}(\tilde{h}_2(k, \tau))(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} \tilde{h}(k, 0) dk = h(x, 0) = h_2(x, \tau) \quad \text{Equação 4.53}$$

Substituindo as duas equações acima na Equação 4.50 obtém-se a solução da equação de difusão definida na Equação 4.39.

$$\begin{aligned}h(x, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\tau}} e^{-(x-\xi)^2/4\tau} h(\xi, 0) d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x-\xi)^2/4\tau} h(\xi, 0) d\xi\end{aligned}\quad \text{Equação 4.54}$$

No caso das opções de categoria europeias, o valor incrementado às opções quando atingida a maturidade, ou seja quando $t = T \Rightarrow \tau = 0$, corresponde ao preço da ação menos o preço de exercício, no caso de uma opção de compra, ou, se for uma opção de venda, ao preço de exercício menos o preço da ação. Se, independentemente do tipo de opção em causa, esse valor for negativo, a opção não será exercida e, conseqüentemente, o valor incrementado à opção será nulo. Transcrevendo esta situação matematicamente é possível encontrar o desenvolvimento do termo $h(\xi, 0)$ da Equação 4.54 equação acima, ficando assim possível encontrar a sua solução.

$$W(S, T) = \max[\varepsilon(S - K), 0] \quad , \varepsilon = \begin{cases} 1, & \text{para uma opção de compra} \\ -1, & \text{para uma opção de venda} \end{cases} \quad \text{Equação 4.55}$$

Resolvendo a Equação 4.35 em ordem a h :

$$\begin{aligned} W(S, t) &= K \exp\left[-\left(\frac{1}{4}a^2 + a + 1\right)\tau\right] \exp\left[-\frac{a}{2}x\right] h(x, \tau) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow h(x, \tau) &= \frac{1}{K} \exp\left[\left(\frac{1}{4}a^2 + a + 1\right)\tau\right] \exp\left[\frac{a}{2}x\right] W(S, t) \end{aligned} \quad \text{Equação 4.56}$$

Quando a opção atinge a maturidade ($t = T \Rightarrow \tau = 0$), e relembando que $S = Ke^x$, a equação acima toma a forma:

$$h(x, 0) = \frac{1}{K} \exp\left[\frac{a}{2}x\right] W(Ke^x, T) \quad \text{Equação 4.57}$$

Introduzindo na Equação 4.57 o limite definido na Equação 4.55:

$$\begin{aligned} h(x, 0) &= \frac{1}{K} \exp\left[\frac{a}{2}x\right] \max[\varepsilon(Ke^x - K), 0] = \\ &= \exp\left[\frac{a}{2}x\right] \max[\varepsilon(e^x - 1), 0] = \max\left[\varepsilon\left(e^{\left(\frac{a}{2}+1\right)x} - e^{\frac{a}{2}x}\right), 0\right] \end{aligned} \quad \text{Equação 4.58}$$

Este resultado, definido nas condições da maturidade da opção, pode agora ser introduzido na solução geral da equação de difusão (v. Equação 4.54).

$$h(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x-\xi)^2/4\tau} \max\left[\varepsilon\left(e^{\left(\frac{a}{2}+1\right)\xi} - e^{\frac{a}{2}\xi}\right), 0\right] d\xi \quad \text{Equação 4.59}$$

A condição implícita no valor da opção aquando da sua maturidade permite definir também os limites de integração da Equação 4.59. O termo maximizante da equação, $e^{\left(\frac{a}{2}+1\right)\xi} - e^{\frac{a}{2}\xi}$, é maior que zero se e só se ξ for estritamente positivo; pois, caso contrário, se estes limites não se verificarem, a opção não será exercida.

$$h(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_0^{+\infty} e^{-(x-\xi)^2/4\tau} \varepsilon\left(e^{\left(\frac{a}{2}+1\right)\xi} - e^{\frac{a}{2}\xi}\right) d\xi \quad \text{Equação 4.60}$$

Rearranjando esta equação e realizando a seguinte troca de variáveis: $\eta = \xi/\varepsilon$ e $d\eta = d\xi/\varepsilon$; obtém-se o resultado abaixo.

$$\begin{aligned} h(x, \tau) &= \varepsilon \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_0^{+\infty} \exp\left[\frac{-(x-\xi)^2}{4\tau} + \left(\frac{a}{2} + 1\right)\eta\varepsilon\right] d\eta - \\ &- \varepsilon \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_0^{+\infty} \exp\left[\frac{-(x-\eta\varepsilon)^2}{4\tau} + \left(\frac{a}{2}\right)\eta\varepsilon\right] d\eta \end{aligned} \quad \text{Equação 4.61}$$

Da Equação 4.61 podem então ser considerados dois integrais indexados, $I_{a/2+1}$ e $I_{a/2}$, como termos da função $h(x, \tau)$.

$$h(x, \tau) = \varepsilon I_{a/2+1} - \varepsilon I_{a/2} \quad \text{Equação 4.62}$$

$$I_{a/2+1} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_0^{+\infty} \exp \left[\frac{-(x - \xi)^2}{4\tau} + \left(\frac{a}{2} + 1 \right) \eta \varepsilon \right] d\eta \quad \text{Equação 4.63}$$

$$I_{a/2} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_0^{+\infty} \exp \left[\frac{-(x - \eta\varepsilon)^2}{4\tau} + \left(\frac{a}{2} \right) \eta \varepsilon \right] d\eta \quad \text{Equação 4.64}$$

Os integrais acima definidos podem, através de uma mudança de variáveis, ser transformados na distribuição cumulativa normal estandardizada (com média 0 e desvio padrão 1).

A Equação 4.65 mostra a distribuição normal cumulativa estandardizada definida por Gauss.

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\zeta} e^{-\eta^2/2} d\eta \quad \text{Equação 4.65}$$

Considerando um integral generalizado I_α :

$$I_\alpha = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_0^{+\infty} \exp \left[-\frac{(x - \varepsilon\xi)^2}{4\tau} + \alpha\varepsilon\xi \right] d\xi \quad \text{Equação 4.66}$$

O termo exponencial do integral acima pode, a partir de uma nova mudança de variáveis (obtida através da sua definição numa função polinomial [v. Equação 4.67]), ser transformado num exponencial com termos correspondentes às variáveis presentes na função da distribuição normal cumulativa estandardizada.

$$-\frac{(x - \varepsilon\xi)^2}{4\tau} + \alpha\varepsilon\xi = -c_5(c_6 - \varepsilon\xi)^2 + c_7 \quad \text{Equação 4.67}$$

c_5 , c_6 e c_7 são constantes referidas à variável de integração (ξ). Expandindo ambos os lados da equação acima, evidenciando as potências de $\varepsilon\xi$ (e lembrando que $\varepsilon = \pm 1 \Rightarrow \varepsilon^2 = 1$):

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4\tau} (\xi\varepsilon)^2 - \frac{1}{4\tau} x^2 + \frac{1}{4\tau} 2x\varepsilon\xi + \alpha\varepsilon\xi = -c_5 c_6^2 - c_5 (\varepsilon\xi)^2 + 2c_6 \varepsilon\xi + c_7 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & -\frac{1}{4\tau} (\xi\varepsilon)^2 - \left(\frac{1}{4\tau} 2x + \alpha \right) (\varepsilon\xi) - \frac{1}{4\tau} x^2 = -c_5 (\varepsilon\xi)^2 + 2c_6 c_5 \varepsilon\xi + c_7 - c_5 c_6^2 \end{aligned} \quad \text{Equação 4.68}$$

Por comparação entre os termos dos dois lados da Equação 4.68 são então definidos os valores das constantes.

$$\begin{cases} -c_5 = -\frac{1}{4\tau} \\ 2c_6c_5 = -\left(\frac{1}{4\tau}2x + \alpha\right) \\ c_7 - c_5c_6^2 = -\frac{1}{4\tau}x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_5 = \frac{1}{4\tau} \\ c_6 = x + 2\alpha\tau \\ c_7 = x\alpha + \alpha^2\tau \end{cases} \quad \text{Equação 4.69}$$

Introduzindo estas constantes na Equação 4.66 (note-se que a constante c_7 , por não estar a fazer nenhuma operação com a variável de integração, pode ser passada para fora do integral).

$$I_\alpha = e^{c_7} \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_0^{+\infty} \exp[-c_5(c_6 - \xi\varepsilon)^2] d\xi \quad \text{Equação 4.70}$$

Promovendo agora uma mudança de variáveis [$\eta = (c_6 - \xi\varepsilon)\sqrt{2c_5}$ e $d\eta = -d\xi\varepsilon\sqrt{2c_5}$] com o objetivo de aproximar a forma do integral acima com a forma do integral da distribuição normal cumulativa estandardizada, obtém-se o seguinte integral:

$$I_\alpha = \frac{e^{c_7}}{\sqrt{2c_5}\sqrt{4\pi\tau}} \left(-\varepsilon \int_{c_6\sqrt{2c_5}}^{-\varepsilon\infty} e^{-\eta^2/2} d\eta \right) \quad \text{Equação 4.71}$$

Se $\varepsilon = 1$, a equação acima pode ser diretamente reduzida à forma da distribuição normal cumulativa estandardizada:

$$I_\alpha = e^{c_7} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{c_6\sqrt{2c_5}} e^{-\eta^2/2} d\eta \right) = e^{c_7} \Phi(c_6\sqrt{2c_5}) \quad \text{Equação 4.72}$$

Contudo, para obter um resultado análogo quando $\varepsilon = -1$, é necessário fazer ainda mais uma troca de variáveis. Este resultado está descrito na Equação 4.73.

$$\begin{aligned} I_\alpha &= e^{c_7} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{c_6\sqrt{2c_5}}^{+\infty} e^{-\eta^2/2} d\eta \right) \xrightarrow{\zeta=-\eta, d\zeta=-d\eta} \\ &\xrightarrow{\zeta=-\eta, d\zeta=-d\eta} I_\alpha = e^{c_7} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{-c_6\sqrt{2c_5}} e^{-\zeta^2/2} d\zeta \right) = e^{c_7} \Phi(-c_6\sqrt{2c_5}) \end{aligned} \quad \text{Equação 4.73}$$

Concluindo, resolvendo o integral para ambos os casos, $\varepsilon = \pm 1$, simultaneamente, obtém-se o seguinte resultado:

$$I_\alpha = e^{c_7} \Phi(\varepsilon c_6\sqrt{2c_5}) \quad \text{Equação 4.74}$$

Restituindo às constantes c_5 , c_6 e c_7 os seus valores respetivos (dependentes das variáveis anteriormente consideradas) (v. Equação 4.69) obtém-se o valor do integral I_α .

$$e^{c_7} = e^{\alpha(x+\alpha\tau)} \quad \text{Equação 4.75}$$

$$c_6\sqrt{2c_5} = \frac{x + 2\alpha\tau}{\sqrt{2\tau}} \quad \text{Equação 4.76}$$

$$I_\alpha = e^{\alpha(x+\alpha\tau)} \Phi\left(\varepsilon \frac{x + 2\alpha\tau}{\sqrt{2\tau}}\right) \quad \text{Equação 4.77}$$

Os integrais definidos na Equação 4.63 e na Equação 4.64 serão então:

$$I_{a/2} = e^{a/2(x+a/2\tau)} \Phi\left(\varepsilon \frac{x + a\tau}{\sqrt{2\tau}}\right) \quad \text{Equação 4.78}$$

$$I_{a/2+1} = e^{(a/2+1)(x+(a/2+1)\tau)} \Phi\left(\varepsilon \frac{x + 2(a/2 + 1)\tau}{\sqrt{2\tau}}\right) \quad \text{Equação 4.79}$$

Introduzindo o desenvolvimento destes integrais na Equação 4.62, a expressão da função $h(x, \tau)$ ficará:

$$h(x, \tau) = \varepsilon e^{(a/2+1)(x+(a/2+1)\tau)} \Phi\left(\varepsilon \frac{x + 2(a/2 + 1)\tau}{\sqrt{2\tau}}\right) - \varepsilon e^{a/2(x+a/2\tau)} \Phi\left(\varepsilon \frac{x + a\tau}{\sqrt{2\tau}}\right) \quad \text{Equação 4.80}$$

Substituindo esta função na função do valor da opção (v. Equação 4.56):

$$W(S, t) = Ke^{-\left(\frac{1}{4}a^2+a+1\right)\tau} e^{-\frac{a}{2}x} \left(\varepsilon e^{(a/2+1)(x+(a/2+1)\tau)} \Phi\left(\varepsilon \frac{x + 2(a/2 + 1)\tau}{\sqrt{2\tau}}\right) - \varepsilon e^{a/2(x+a/2\tau)} \Phi\left(\varepsilon \frac{x + a\tau}{\sqrt{2\tau}}\right) \right) \quad \text{Equação 4.81}$$

Para obter a forma final da função para cálculo do valor de uma opção de estilo europeu, a denominada equação de Black-Scholes, o passo final necessário é o de restituir as variáveis de substituição (a , x e τ) o seu valor respetivo (v. da Equação 4.36 à Equação 4.38). Devido à redundância deste exercício matemático relativamente simples mas extenso, apenas a solução final simplificada está presente na Equação 4.82.

$$W(S, t) = \varepsilon K \frac{S}{K} \Phi\left(\varepsilon \frac{\ln(S/K) + (T-t)(r - \sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) - \varepsilon K e^{-r(T-t)} \Phi\left(\varepsilon \frac{\ln(S/K) + (T-t)(r + \sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \quad \text{Equação 4.82}$$

Concluindo a derivação da equação de Black-Scholes, uma forma simplificada e fácil de computar do modelo é assim descrita:

$$W(S, t) = \varepsilon S \Phi(\varepsilon d_1) - \varepsilon K e^{-r(T-t)} \Phi(\varepsilon d_2) \quad \text{Equação 4.83}$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (T - t)(r + \sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{T - t}} \quad \text{Equação 4.84}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/K) + (T - t)(r - \sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{T - t}} = d_1 - \sqrt{T - t} \quad \text{Equação 4.85}$$

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & \text{para uma opção de compra} \\ -1, & \text{para uma opção de venda} \end{cases} \quad \text{Equação 4.86}$$

Numa nota final, mais se acrescenta que a derivação realizada por Robert Cox Merton do modelo de Black-Scholes é relativamente análoga ao descrito neste capítulo. Apenas uma modificação necessita ser feita para incluir o caso da existência de dividendos (D) no preço da ação subjacente à opção: $S^*_0 = S_0 e^{-DT}$.

Anexo 2. Os gregos

Seguindo os princípios da Equação de Black-Scholes podem ser determinados os termos referidos por letras gregas, vulgarmente utilizados para estimar a variação do preço de opções com certos fatores do mercado como o valor das ações ou o tempo até à expiração da opção. A Tabela 4.1 resume as fórmulas destes termos comparativos mais importantes.

Tabela 4.1: os gregos para o caso das opções do tipo europeu.

α (alfa)	$\sigma - r = \alpha + \beta(R - r) + \epsilon$
β (beta)	
Δ (delta)	$\Delta = \Phi\left(\epsilon \frac{\ln(S/K) + (T-t)(r + \sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) = \Phi(\epsilon d_1)$
ν (vega)	$\nu = S\sqrt{T^*}\Phi(d_1) = K\sqrt{T^*}\Phi(d_2)$
θ (teta)	$\theta = -\frac{S\Phi'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T^*}} - \epsilon r K e^{-rT^*}\Phi(\epsilon d_2)$
P (rho)	$P = KT^*e^{-rT^*}\Phi(\epsilon d_2)$

Para além das variáveis já identificadas, na linha característica utilizada para determinar o alfa e o beta, R é o risco sistemático associado a um índice de mercado, que afeta todo o mercado.

Alpha e beta

Estes dois termos são utilizados para descrever as ações, para compará-las a um índice de mercado usado como termo de comparação. Fazendo a regressão linear do valor da volatilidade verificada de uma ação ao longo do tempo em função do risco sistemático do mercado, obtêm-se os valores dos dois parâmetros.

O beta será então uma medida de como uma ação se comporta face ao mercado. Por exemplo, um beta de 1,2 indica que a ação sobe 1,2 pontos por cada ponto do índice referido.

O alfa reflete a performance da ação face ao índice utilizado como *benchmark*, independentemente do beta.

As restantes variáveis denominadas por letras gregas referem-se às opções, comparando o movimento do seu preço ou volatilidade relativamente à variação de preço ou volatilidade da ação subjacente ou à aproximação do tempo marcado para a maturidade.

Delta

O delta é uma medida da variação do preço de uma opção quando o preço da ação varia dependendo do tempo restante até à maturidade. O delta tem um valor positivo entre 0 e 1 para uma opção de compra e um valor negativo entre -1 e 0 para uma opção de venda. Por exemplo, um delta de 0,5 significa que, se a ação subir de preço uma unidade, o prémio da opção subirá em 0,5.

Vega

O vega corresponde à primeira derivada do preço da opção relativamente à volatilidade da ação subjacente. Desta forma, pode-se obter uma estimativa de quanto o preço, ou prémio, de uma opção varia quando a volatilidade varia. De um modo simplista e generalizado, quando a volatilidade aumenta o valor da opção aumenta.

Teta

É a primeira derivada do preço de uma opção determinado segundo a equação de Black-Scholes relativamente ao tempo restante até à maturidade da opção. Ou seja, como o valor de uma opção varia à medida que se aproxima a sua data de expiração. Uma posição definida por possuir uma opção com um teta elevado é uma posição com um lucro associado à medida que o tempo passa.

Ro

O preço da opção derivado relativamente à taxa de juro. O seu cálculo resulta numa estimativa de quanto o preço de uma opção varia quando a taxa de juro varia. Na prática observa-se que taxas de juro mais altas resultam em valores mais altos de opções de compra, enquanto o preço de opções de venda diminui.

Anexo 3. O modelo GARCH (m, s)

Esta explicação introdutória ao modelo generalizado autorregressivo com volatilidade condicional heteroscedástica (*Generalised Auto-Regressive Conditional Heteroscedasticity*) é baseada no livro de Ruey S. Tsay, de 2010, Analysis of Financial Time Series.

A modelação da volatilidade, para lá do que é feito com os modelos ARMA (*Auto-Regressive Moving Average*), é muito útil para obter parâmetros que descrevam a variação da volatilidade incorporando termos aleatórios que mimetizem o ruído característico de séries temporais.

Na base do desenvolvimento do modelo GARCH está o modelo ARMA. O modelo ARMA define a média condicional (μ_t) e a variância condicional (σ_t^2) dada a informação em $t - 1$ (denotada como F_{t-1}):

$$\mu_t = E[r_t | F_{t-1}] \quad \text{Equação 4.87}$$

$$\sigma_t^2 = \text{Var}[r_t | F_{t-1}] = E[(r_t - \mu_t)^2 | F_{t-1}] \quad \text{Equação 4.88}$$

Desta forma, definindo o valor logaritmo do rendimento de um ativo ($r_t = \ln(S_t/S_{t-1})$) em termos da média das observações (μ_t) e da inovação dos valores (a_t):

$$r_t = \mu_t + a_t \quad \text{Equação 4.89}$$

A equação da média para r_t é definida parametricamente, podendo os seus parâmetros ser determinados por regressão linear.

$$\mu_t = \sum_{i=1}^p \phi_i r_{t-i} - \sum_{i=1}^q \theta_i a_{t-i} \quad \text{Equação 4.90}$$

Num modelo ARMA, o termo a_t corresponderia somente à modelação do ruído: um termo aleatório determinado por uma função de distribuição, geralmente a distribuição normal, como se verá mais adiante.

O modelo ARCH (*Auto-Regressive Conditional Heteroscedastic*), primeiramente descrito por Engle em 1982, introduziu uma nova definição para a inovação, definindo-a também condicionalmente, refletindo a ideia de que a inovação, ou choque, a_t , de um ativo é não correlacionada, mas dependente, e que essa dependência pode ser descrita por uma função quadrática dos seus valores passados.

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t \quad \text{Equação 4.91}$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i a_{t-i}^2 \quad \text{Equação 4.92}$$

Onde $\{\epsilon_t\}$ é uma série de valores aleatórios independente e identicamente distribuídos. α são os parâmetros da variância. Numa nota extra, deve-se dizer que os parâmetros α devem corresponder a algumas condições para assegurar que a volatilidade não infinita: devem ser sempre maiores que zero e a soma dos parâmetros α_i , com i entre 1 e m deve ser inferior a 1. Além disso, é prática assumir que os valores de ϵ_t seguem a distribuição normal estandardizada, ou a distribuição de t-Student ou a função de erro generalizada.

Apesar de ser simples, o modelo GARCH necessita geralmente de ser de uma elevada ordem (m), de ter muitos parâmetros, para adequadamente descrever o processo da volatilidade dos rendimentos de um ativo. O modelo GARCH, proposto por Borelev em 1986, é uma extensão do modelo ARCH, podendo ser facilmente compreendido verificando que não é mais que a adição de um termo dependente dos valores passados da volatilidade à expansão da equação da variância do modelo ARCH. Assim, a inovação de um ativo (a_t) segue um modelo GARCH (m,s) quando:

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t \quad \text{Equação 4.93}$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad \text{Equação 4.94}$$

Mais uma vez, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i, \beta_j > 0$ e $\sum_{i=1}^{\max(m,s)} (\alpha_i + \beta_i) < 1$, para assegurar a condição de estacionariedade.

Resumindo, para descrever uma série temporal de valores de ativos financeiros, aplicando ultimamente o modelo GARCH para descrever a sua volatilidade, são necessários os seguintes passos:

1. Definição do logaritmo dos rendimentos da ação (S_t) – r_t ,

$$r_t = \ln \frac{S_t}{S_{t-1}} \quad \text{Equação 4.95}$$

2. Relembrando que $r_t = a_t + \mu_t$, é necessário estabelecer um modelo para a média (μ_t). Vulgarmente, o modelo escolhido para descrever a média é o ARMA (p, q) e ter-se-á:

$$\mu_t = \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} - \sum_{i=1}^q \theta_i a_{t-i} \quad \text{Equação 4.96}$$

Uma nota se deixa para o facto de ser comum, quando aplicando o modelo GARCH a uma série temporal, se considerar para a média o modelo ARMA (0, 0), ou seja, não considerando a influência da média na inovação do logaritmo do rendimento.

3. Descrever a inovação ($a_t = \sigma_t \epsilon_t$) segundo o modelo GARCH (m,s), escolhendo para o termo de erro uma distribuição estandardizada.

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

Equação 4.97

Anexo 4. Exemplo de código introduzido no R

```

54 GA <- function (stocks.eval, pop.inicial, max.gen = 5, max.pop = 10, to.keep.ind = 5, min.ind.length = 20,
55   max.ind.length = 150, muta.prob = 0.25, muta.agg.prob = 0.3, crow.prob = 0.45, fitness.lower = 0,
56   diff.fit.lower = TRUE, lower.pct = 0.001, fitness.upper = 1, diff.fit.upper = FALSE, upper.pct = 10000,
57   vol = TRUE, BS = TRUE, GARCH = TRUE, seg.length = 20) {
58
59   # Initialize algorithm
60   time.1 <- Sys.time()
61   # Set Fitness tracking
62   fit.track <- data.frame(Generation = as.numeric(), Fitness = as.numeric(), Best.Generation = as.numeric())
63
64   pop <- list()
65   for (i in 1:to.keep.ind) {
66     pop[[i]] <- pop.inicial[[1]]
67   }
68   Stock <- stocks.eval
69
70   if (diff.fit.lower == TRUE) {
71     fitness.lower <- (Stocks.eval[[2]] + Stocks.eval[[3]]) * lower.pct
72   }
73
74   if (diff.fit.upper == TRUE) {
75     fitness.upper <- (Stocks.eval[[2]] + Stocks.eval[[3]]) * upper.pct
76   }
77
78   # genetic operations counters
79   mut <- 0 # mutation
80   magg <- 0 # aggregated mutation
81   co <- 0 # cross-over
82   gen <- 1
83
84   while (gen <= max.gen) {
85     i <- to.keep.ind + 1
86     while (i <= max.pop) {
87       # Function for the selection of an individual on which to perform a genetic operation
88       select.ind <- function() {
89         inds <- c(1:(to.keep.ind))
90         inds.prob <- (1 - sqrt(inds / sum(inds))) ^ 5
91         selected.ind <- sample(inds, size = 1, replace = TRUE, prob = inds.prob)
92         return(selected.ind)
93       }
94       # Select genetic operation to perform
95       gen.op <- c(1, 2, 3)
96       gen.op.prob <- c(muta.prob, muta.agg.prob, crow.prob)
97       select.gen <- sample(gen.op, size = 1, replace = TRUE, prob = gen.op.prob)
98
99       ### A mutation is selected to be performed (select.gen = 1)
100      if (select.gen == 1) {
101        # select a parent
102        parent <- select.ind()
103        parent <- pop[[parent]][[1]]
104        # perform mutation
105        son <- try(withTimeout(Mutation(ind.vec = parent, Stocks.eval = Stock,
106          vol = vol, BS = BS, GARCH = GARCH, gen = gen),
107          timeout = 60, ontimeout = "silent"), silent = TRUE)
108        if ("try-error" %in% class(son)) {
109          } else {
110            if (is.null(son) | is.na(son$GA.fitness) |
111              son$GA.fitness < fitness.lower | son$GA.fitness > fitness.upper |
112              length(son$GA.numeric.vec) < min.ind.length | length(son$GA.numeric.vec) > max.ind.length) {
113              } else {
114                pop[[i]] <- son
115                i <- i + 1
116                mut <- mut + 1
117              }
118            }
119          }
120        }
121      }
122
123      ### An aggregated mutation is selected to be performed (select.gen = 2)
124      if (select.gen == 2) {
125        # select a parent
126        parent <- select.ind()
127        parent <- pop[[parent]][[1]]
128
129        # perform mutation
130        son <- try(withTimeout(Mutation.agg(parent, Stocks.eval = Stock,
131          vol = vol, BS = BS, GARCH = GARCH,
132          seg.length = seg.length, gen = gen),
133          timeout = 60, ontimeout = "silent"), silent = TRUE)
134        if ("try-error" %in% class(son)) {
135          } else {
136            if (is.null(son) | is.na(son$GA.fitness) |
137              son$GA.fitness < fitness.lower | son$GA.fitness > fitness.upper |
138              length(son$GA.numeric.vec) < min.ind.length | length(son$GA.numeric.vec) > max.ind.length) {
139              } else {
140                pop[[i]] <- son
141                i <- i + 1
142                magg <- magg + 1
143              }
144            }
145          }
146        }
147
148      ### A cross-over is selected (select.gen = 3)
149      if (select.gen == 3) {
150        # select two parents
151        parent.1 <- select.ind()
152        parent.1 <- pop[[parent.1]][[1]]
153        parent.2 <- select.ind()
154        parent.2 <- pop[[parent.2]][[1]]
155        # perform cross-over
156        sons <- try(withTimeout(Cross.over(parent.1, parent.2, Stocks.eval = Stock,
157          vol = vol, BS = BS, GARCH = GARCH, gen = gen),
158          timeout = 60, ontimeout = "silent"), silent = TRUE)
159        if ("try-error" %in% class(sons)) {
160          } else {
161            if (is.null(sons)) {
162              } else {
163                if (is.na(sons[[1]]$GA.fitness) |
164                  sons[[1]]$GA.fitness < fitness.lower | sons[[1]]$GA.fitness > fitness.upper |
165                  length(sons[[1]]$GA.numeric.vec) < min.ind.length | length(sons[[1]]$GA.numeric.vec) > max.ind.length) {
166                } else {
167                  son.1 <- sons[[1]]
168                  pop[[i]] <- son.1
169                  i <- i + 1
170                }
171                if (is.na(sons[[2]]$GA.fitness) |
172                  sons[[2]]$GA.fitness < fitness.lower | sons[[2]]$GA.fitness > fitness.upper |
173                  length(sons[[2]]$GA.numeric.vec) < min.ind.length | length(sons[[2]]$GA.numeric.vec) > max.ind.length) {
174                } else {
175                  son.2 <- sons[[2]]
176                  pop[[i+1]] <- son.2
177                  i <- i + 1
178                  co <- co + 1
179                }
180              }
181            }
182          }
183
184          # order population
185          pop <- pop[order(sapply(pop, '[', 3), decreasing = TRUE)]
186
187          fit.track <- rbind(fit.track, c(Generation = gen, Fitness = pop[[1]][[3]], Best.Generation = pop[[1]][[4]])
188          gen <- gen + 1
189        }
190      }
191
192      time.2 <- Sys.time()
193      time <- round(-difftime(time.1, time.2, units = "secs"), digits = 0)
194      pop
195      best <- pop[[1]]
196      colnames(fit.track) <- c("Generation", "Best fitness", "Best Generation")
197
198      return(list(Best.individual = best,
199        time = time,
200        amount.of.mutations = mut,
201        amount.of.aggregated.mutations = magg,
202        amount.of.cross.overs = co,
203        Fitness.tracking = fit.track))
204    }
205  }
206
207
208
209
210
211
212
213
214

```

Anexo 5. Exemplo de uma janela do RStudio

The screenshot displays the RStudio environment with the following components:

- Source Editor:** Contains R code for a genetic algorithm (GA) simulation. The code includes parameter settings for population size (100), fitness upper/lower bounds, and a fitness function that calculates the standard deviation of stock returns.
- Environment Pane:** Lists objects created during the execution, including vectors for population parameters and functions for the GA process.
- Console:** Shows the output of the GA simulation, including the best individual evaluation and the final fitness value (0.9364324).
- Plots Pane:** Displays a line plot titled "Preço da opção (SIS)" showing the evolution of stock prices from 1985 to 2015. The plot includes several data series: "Volareal" (blue), "Black-Scholes" (orange), "GARCH" (green), and "AG" (red).