DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Exercícios Resolvidos Extra de Cálculo Diferencial e Integral I LEIC-T, LEE, LETI, LEGI - CDI-I -, 1.º Semestre 2024/25

Capítulo 5. Cálculo Integral

Definição e propriedades

1. Considere a função f definida no intervalo $[0, 2]$ por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, 1[\\ 2 & \text{se } x = 1 \\ 3 & \text{se } x \in]1, 2] \end{cases}$$

a) Mostre que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma decomposição P_n do intervalo $[0, 2]$ tal que as somas superior $\overline{S}_{P_n}(f)$ e inferior $\underline{S}_{P_n}(f)$ verificam

$$\overline{S}_{P_n}(f) - \underline{S}_{P_n}(f) < \frac{1}{n}, \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to+\infty} \overline{S}_{P_n}(f) = \lim_{n\to+\infty} \underline{S}_{P_n}(f) = 4.$$

b) Justifique que f é integrável em $[0, 2]$ e que $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx = 4$.

RESOLUÇÃO

a) Escolhemos uma decomposição de $[0, 2]$ da forma $P = \{0, 1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon, 2\}$. Como

$$\sup_{x\in[0,1-\varepsilon]} f(x) = \inf_{x\in[0,1-\varepsilon]} f(x) = 1,$$
$$\sup_{x\in[1-\epsilon,1+\varepsilon]} f(x) = 3, \quad \inf_{x\in[1-\varepsilon,1+\varepsilon]} f(x) = 1,$$
$$\sup_{x\in[1+\varepsilon,2]} f(x) = \inf_{x\in[1+\varepsilon,2]} f(x) = 3,$$

temos

$$\overline{S}_P(f) = 1(1 - \varepsilon - 0) + 3(2 - (1 - \varepsilon)) = 4 + 2\varepsilon$$
$$\underline{S}_P(f) = 1(1 + \varepsilon - 0) + 3(2 - (1 + \varepsilon)) = 4 - 2\varepsilon$$

Tomando, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon = \dfrac{1}{4(n+1)}$ temos

$$\overline{S}_{P_n}(f) - \underline{S}_{P_n}(f) = 4\varepsilon = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

e também

$$\lim \overline{S}_{P_n}(f) = \lim 4 + \frac{1}{2(n+1)} = 4, \quad \lim \underline{S}_{P_n}(f) = \lim 4 - \frac{1}{2(n+1)} = 4.$$

b) Da alínea anterior, $\lim \overline{S}_{P_n}(f) - \underline{S}_{P_n}(f) = 0$, logo f é integrável em $[0, 2]$ e $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx = \lim \overline{S}_{P_n}(f) = 4$.

2. O objetivo deste exercício é mostrar que o produto de funções integráveis é integrável.

   a) Sendo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável, mostre, recorrendo à definição, que f^2 é integrável. (Sugestão: Considere $f \geq 0$; o caso geral segue de $f^2 = |f|^2$).

   b) Sendo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções integráveis, justifique que fg é integrável. (Sugestão: $fg = \frac{1}{2}((f + g)^2 - f^2 - g^2)$.)

RESOLUÇÃO

a) Seja $f \geq 0$. Para cada decomposição $P = \{a = t_0, t_1, ..., t_n = b\}$, tem-se, escrevendo

$$M_i = \sup_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x), \qquad m_i = \inf_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x),$$

$$M_i(f^2) = \sup_{x\in[t_{i-1},t_i]} f^2(x) = \left(\sup_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x)\right)^2 = M_i(f)^2,$$

$$m_i(f^2) = \inf_{x\in[t_{i-1},t_i]} f^2(x) = \left(\inf_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x)\right)^2 = m_i(f)^2.$$

Temos então

$$\begin{aligned}
\overline{S}_P(f^2) - \underline{S}_P(f^2) &= \sum_{i=1}^{n}(M_i(f^2) - m_i(f^2))(t_i - t_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(M_i(f)^2 - m_i(f)^2)(t_i - t_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(M_i(f) - m_i(f))(M_i(f) + m_i(f))(t_i - t_{i-1}) \\
&\leq 2M\sum_{i=1}^{n}(M_i(f) - m_i(f))(t_i - t_{i-1}) = 2M(S_d(f) - s_d(f)),
\end{aligned}$$

onde $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, como f é integrável, podemos escolher a decomposição P tal que $\overline{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) < \frac{\varepsilon}{2M}$, e portanto tal que

$$\overline{S}_P(f^2) - \underline{S}_P(f^2) < \varepsilon.$$

Conclui-se que f^2 é integrável para $f \geq 0$ integrável.
Para f arbitrária, como f integrável $\Rightarrow |f|$ integrável e portanto, como vimos acima, $|f|^2 = f^2$ é integrável.

b) De $fg = \frac{1}{2}((f + g)^2 - f^2 - g^2)$, temos que fg é uma soma de funções integráveis, e portanto integrável.

3. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, \\ \dfrac{1}{k} & \text{se } x \in \left]\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right], k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

a) Mostre que f é descontínua em qualquer ponto da forma $x = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

b) Mostre que f é monótona crescente. Justifique que f é integrável em $[0,1]$.[1]

RESOLUÇÃO

a) É imediato da definição que, para cada $k \in \mathbb{N}$ fixo maior ou igual do que 2,

$$\lim_{x \to \frac{1}{k}^-} f(x) = \frac{1}{k} \quad \text{e} \quad \lim_{x \to \frac{1}{k}^+} f(x) = \frac{1}{k-1}.$$

Logo, f não é contínua em $\frac{1}{k}$.
(Já agora: f é contínua em qualquer $x \neq \frac{1}{k}$, $k \geq 2$, é contínua à esquerda em 1 e contínua à direita em 0.)

b) Seja $x \in]0,1[$ e $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \left]\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$. Se $y > x$ então:

– se $y \in \left]\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$, então $f(x) = f(y) = \frac{1}{k}$.

– caso contrário, $y \in \left]\frac{1}{l+1}, \frac{1}{l}\right]$, com $l < k$, já que $y > x$. Logo $f(y) = \frac{1}{l} > \frac{1}{k} = f(x)$.

Em qualquer dos caso, $f(y) \geq f(x)$ e f é monótona crescente (não estritamente). É integrável já que qualquer função monótona (em $[a,b]$) é integrável (em $[a,b]$).

4. a) Sendo f uma função contínua em $\mathbb{R}$, prove que, se é nulo o integral de f em *qualquer* intervalo limitado, então $f(x) = 0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

b) Dê um exemplo de uma função integrável e com integral nulo em qualquer intervalo limitado e que não verifique $f(x) = 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

RESOLUÇÃO

a) Se, por contradição, fosse $f(a) > 0$ para algum a, como f é contínua, teríamos

$$f(x) > \frac{f(a)}{2} > 0 \qquad \text{em } [a-\varepsilon, a+\varepsilon], \text{ para algum } \varepsilon > 0.$$

Da monotonia do integral,

$$\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(t)\,dt > \varepsilon f(a) > 0,$$

[1] NOTA: f é um exemplo de uma função integrável com um número infinito (numerável) de descontinuidades.

o que contradiz a hipótese. Da mesma forma, também não pode ser $f(a) < 0$. Logo, $f(x) = 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

(Resolução alternativa: Tem-se por hipótese $\int_0^x f(t)\,dt = 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Derivando ambos os membros (usando o Teorema Fundamental do Cálculo, já que f é contínua), temos

$$\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)' = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0.)$$

b) É suficiente tomar $f(x) = 0$ excepto num conjunto finito de pontos. Por exemplo a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 3 & x = 0, \\ 0 & x \neq 0. \end{cases}$$

Teorema Fundamental do Cálculo

5. Calcule $\phi'(x)$, sendo $\phi(x) = \int_x^3 x^2 e^{\operatorname{sen} t}\,dt$.

RESOLUÇÃO

Como $e^{\operatorname{sen} t}$ é uma função contínua, do Teorema Fundamental do Cálculo sabemos que $\int_x^3 e^{\operatorname{sen} t}\,dt$ é diferenciável, logo $\phi(x) = x^2 \int_x^3 e^{\operatorname{sen} t}\,dt$ também será e

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= \left(\int_x^3 x^2 e^{\operatorname{sen} t}\,dt\right)' = \left(-x^2 \int_3^x e^{\operatorname{sen} t}\,dt\right)' \\ &= 2x \int_x^3 e^{\operatorname{sen} t}\,dt - x^2 e^{\operatorname{sen} x}. \end{aligned}$$

6. Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$ tal que $f(x) > 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$ e $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

   a) Justifique que F é diferenciável em $\mathbb{R}$ e calcule $F'(x)$.

   b) Mostre que F é estritamente crescente e que, para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $xF(x) > 0$.

   c) Prove que, se f tem limite positivo quando $x \to +\infty$, então $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$. Mostre, por meio de exemplos, que se for $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, então $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ pode ser finito ou $+\infty$.

RESOLUÇÃO

a) Directamente do Teorema Fundamental do Cálculo; $F'(x) = f(x)$.

b) Como $F'(x) = f(x) > 0$, para $x \in \mathbb{R}$, F é estritamente crescente. Temos então $F(x) > F(0) = 0$, para $x > 0$, e $F(x) < F(0) = 0$, para $x < 0$, ou seja, $xF(x) > 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

c) Seja $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}^+$ e $M \in \mathbb{R}$ tal que, para $x > M$, tem-se $f(x) > \frac{L}{2}$. Então, para $x > M$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^M f(t)\,dt + \int_M^x f(t)\,dt \\ &> \int_0^M f(t)\,dt + \frac{L}{2}\int_M^x 1\,dt = \int_0^M f(t)\,dt + \frac{L}{2}(x-M). \end{aligned}$$

Como $\int_0^M f(t)\,dt$ é constante e $\lim_{x\to+\infty} \frac{L}{2}(x-M) = +\infty$, conclui-se que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

Considere $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } |x| > 1 \\ 1 & \text{se } |x| \leq 1. \end{cases}$$

Neste caso $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$. Se

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{se } |x| > 1 \\ 1 & \text{se } |x| \leq 1 \end{cases}$$

temos $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 2$.

7. Seja $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[-1,1]\setminus\{0\}$ tal que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ existem em $\mathbb{R}$ e para $x \in [-1,1]$,

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt, \qquad G(x) = \int_{-x}^x f(t)dt.$$

a) Justifique que F e G estão bem definidas.

b) Mostre que, se $\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$, então F não é diferenciável em 0.

c) Mostre que G é diferenciável em 0 e $G'(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) + \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

RESOLUÇÃO

a) f é integrável em $[-1,1]$ porque é contínua excepto num único ponto e é limitada (mais precisamente: é integrável em $[-1,0]$ e em $[0,1]$ já que em qualquer desses intervalos coincide com uma função contínua, a menos possivelmente de -1 e 1, respectivamente). Logo é integrável em qualquer intervalo da forma $[0,x]$ e $[-x,x]$, para $x \in [-1,1]$.

b) Usando a Regra de Cauchy e o Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$F'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

e da mesma forma $F'_e(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$. Conclui-se que se $\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$ então F não é diferenciável em 0.

c) Temos $G(x) = \int_{-x}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt = -F(-x) + F(x)$. Usando a regra de Cauchy, o Teorema Fundamental do Cálculo e $y = -x$:

$$\begin{aligned} G'_d(0) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{G(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-F(-x)+F(x)}{x} \\ &= \lim_{y\to 0^-} f(y) + \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) + \lim_{x\to 0^+} f(x). \end{aligned}$$

Da mesma forma se vê que $G'_e(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) + \lim_{x\to 0^+} f(x) = G'_d(0)$, logo G é diferenciável em 0 e $G'(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) + \lim_{x\to 0^-} f(x)$.

8. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções integráveis em qualquer intervalo limitado e a seguinte propriedade:

$$\begin{aligned} &\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{x} f(t)\,dt \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ &\int_{-x}^{x} g(t)\,dt = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1}$$

a) Mostre que, se f é par e g é ímpar, então verificam (1).

b) Mostre que, se f e g são contínuas e verificam (1), então f é par e g é ímpar.

c) Forneça exemplos de funções f e g que verificam (1) e que não sejam par nem ímpar, respectivamente.

RESOLUÇÃO

a) ALTERNATIVA 1: Sai da definição de integral e de somas superiores e inferiores dado que, por exemplo, se f é par, $\sup_{[-x_{k+1},-x_k]} f(x) = \sup_{[x_k,x_{k+1}]} f(x)$, logo todas as somas superiores de f em $[-x, 0]$ coincidem com as somas superiores de f em $[0, x]$, e da mesma forma para as somas inferiores, concluindo-se que $\int_{-x}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{x} f(x)\,dx$.

ALTERNATIVA 2: Usando a mudanças de variável $t = -y$ e o facto de f ser par e

g ímpar, vem:

$$\int_{-x}^{0} f(t)\,dt = \int_{x}^{0} -f(-y)\,dy = -\int_{x}^{0} f(y)\,dy = \int_{0}^{x} f(y)\,dy,$$
$$\int_{-x}^{0} g(t)\,dt = \int_{x}^{0} -g(-y)\,dy = \int_{x}^{0} g(y)\,dy = -\int_{0}^{x} g(y)\,dy.$$

e

$$\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = \int_{-x}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt = \int_{0}^{x} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{x} f(t)\,dt,$$
$$\int_{-x}^{x} g(t)\,dt = \int_{-x}^{0} g(t)\,dt + \int_{0}^{x} g(t)\,dt = -\int_{0}^{x} g(t)\,dt + \int_{0}^{x} g(t)\,dt = 0$$

b) Do Teorema Fundamental do Cálculo, vem, derivando ambos os membros nas equações:

$$f(x) - (-x)'f(-x) = 2f(x) \iff f'(x) + f(-x) = 2f(x) \iff f(x) = f(-x),$$

o que mostra que f é par, e

$$g(x) - (-x)'g(-x) = 0 \iff g'(x) + g(-x) = 0 \iff g(-x) = -g(x),$$

o que mostra que g é ímpar.

c) Por exemplo basta alterar uma função contínua par / ímpar num número finito de pontos.

9. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x} - e^{x}}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

a) Justifique a integrabilidade da função f em qualquer intervalo limitado de $\mathbb{R}$.

b) Definindo $\Psi(x) = \int_0^x f(s)\,ds$, justifique que se trata de uma função diferenciável em $\mathbb{R}$, e calcule $\Psi'(x), x \in \mathbb{R}$.

RESOLUÇÃO

a) Note-se que

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - e^{x}}{x} = 1$$

pelo que a função integranda *não* é contínua. No entanto, só difere em 0 da função contínua $\tilde{f}$ definida por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x}-e^{x}}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Como alterar uma função num ponto não altera a sua integrabilidade nem o valor do seu integral, a integrabilidade de $\tilde{f}$ implica a integrabilidade de f em qualquer intervalo limitado, sendo os integrais de $\tilde{f}$ e f iguais.

b)
$$\frac{d\Psi}{dx} = \frac{d}{dx}\int_0^x f = \frac{d}{dx}\int_0^x \tilde{f} = \tilde{f}(x).$$

(Note-se que a não continuidade de f não permite aplicar o teorema fundamental do cálculo para calcular a derivada do integral indefinido de f e tivemos que recorrer à igualdade com o integral de $\tilde{f}$.)

10. Considere a função $\phi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$\phi(x) = \int_1^x \frac{t}{(1+t^2)^2} \ln t \, dt.$$

a) Calcule $\phi(2)$.

b) Mostre que ϕ é diferenciável e calcule $\phi'(x)$.

c) Estude ϕ do ponto de vista do crescimento e mostre que há um só ponto $c > 0$ tal que $\phi(c) = 0$.

RESOLUÇÃO

a) Usando a fórmula de integração por partes,

$$\begin{aligned} \phi(2) &= \int_1^2 \frac{t}{(1+t^2)^2} \ln t \, dt = \left[-\frac{1}{2(1+t^2)} \ln t \right]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{2t(1+t^2)} \, dt \\ &= -\frac{\ln 2}{10} + \frac{1}{2}\int_1^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2} \right) dt = \frac{13}{20}\ln 2 - \frac{1}{4}\ln 5. \end{aligned}$$

b) Uma vez que a função $\dfrac{t}{(1+t^2)^2}\ln t$ é contínua em $\mathbb{R}^+$, pelo Teorema Fundamental do Cálculo vem $\phi'(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^2}\ln x$, para $x > 0$.

c) Tem-se$\frac{x}{(1+x^2)^2} > 0$ para qualquer $x > 0$, logo $\phi'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$, ou seja, ϕ é crescente em $]1, +\infty[$ e decrescente em $]0, 1[$.
Tem-se $\phi(1) = 0$. Se existisse $c \neq 1$ tal que $\phi(c) = 0$, então, do Teorema de Rolle, existiria um zero de ϕ' entre 1 e c. Como $\phi'(x) \neq 0$ para $x \neq 1$, temos que 1 é o único 0 de ϕ.

11. Considere a função $f(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} \, dt.$

a) Determine o seu domínio e mostre que f é par.

b) Mostre ainda que é diferenciável e calcule a sua derivada.

c) Mostre que existe $a > 0$ tal que f é monótona e limitada em $]0, a[$. Que pode concluir da existência de $\lim_{x \to 0} f(x)$?

RESOLUÇÃO

a) Como a função integranda $t \mapsto \frac{\cos t}{t}$ tem domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e é contínua no seu domínio, será integrável em qualquer intervalo limitado que não contenha 0. Como x e $3x$ têm sempre o mesmo sinal, temos $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Fazendo a mudança de variável $t = -u \iff u = -t$ (donde $dt = -du$), temos

$$\begin{aligned} f(-x) &= \int_{-x}^{-3x} \frac{\cos t}{t}\, dt = \int_{x}^{3x} \frac{\cos(-u)}{-u}(-1)\, du \\ &= \int_{x}^{3x} \frac{\cos u}{u}\, du = f(x). \end{aligned}$$

Logo, f é par,

b) Teorema Fundamental do Cálculo, f é diferenciável uma vez que $t \mapsto \frac{\cos t}{t}$ é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\int_{a}^{3x} \frac{\cos t}{t}\, dt - \int_{a}^{x} \frac{\cos t}{t}\, dt \right)' = 3\,\frac{\cos 3x}{3x} - \frac{\cos x}{x} \\ &= \frac{\cos 3x - \cos x}{x}, \end{aligned}$$

em que tomámos $a > 0$, para $x > 0$, e $a < 0$, para $x < 0$.

c) Como cos é decrescente em $]0, \pi[$, temos que para $0 < 3x < \pi$, $\cos(3x) < \cos x$, logo $f'(x) = \frac{\cos 3x - \cos x}{x} < 0$ para $0 < x < \frac{\pi}{3}$, ou seja f é monótona decrescente em $]0, \frac{\pi}{3}[$.
Por outro lado, para $x > 0$,

$$\left| \int_{x}^{3x} \frac{\cos t}{t}\, dt \right| \leq \int_{x}^{3x} \frac{|\cos t|}{|t|}\, dt \leq \int_{x}^{3x} \frac{1}{t}\, dt = [\ln t]_{x}^{3x} = \ln 3.$$

Logo f é limitada em $]0, \frac{\pi}{3}[\subset]0, +\infty[$.
Conclui-se que existe $\lim_{x \to 0^+} f(x)$. Como f é par, existe também $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$, logo existe $\lim_{x \to 0} f(x)$.

12. Sendo $\phi(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$, se $x \neq 0$ e $\phi(0) = 0$, considere a função $g(x) = \displaystyle\int_0^x \phi(t)\, dt$.

(a) Justifique que g é ímpar.

(b) Determine $g'(x)$, para $x \neq 0$ e ainda $g'(0)$.

(c) Indique as abcissas dos pontos onde o gráfico de g tem tangente horizontal. Justifique que g é estritamente crescente.

(d) Justifique que g é limitada.

RESOLUÇÃO

(a) $g(-x) = \int_0^{-x} \phi(t)\, dt = \int_0^{x} \phi(-u)(-1)\, du = -g(x)$, notando que ϕ é par.

(b) Para $x \neq 0$ temos do Teorema Fundamental do Cálculo

$$g'(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Em $x = 0$:

$$g'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \phi(t)\, dt}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-\cos x}{x^2}}{1} = \frac{1}{2}.$$

(Alternativamente, poderiamos considerar a função $\tilde{\phi}(x) = \phi(x)$, para $x \neq 0$ e $\tilde{\phi}(0) = \lim_{x\to 0} \phi(x) = \frac{1}{2}$, que é contínua em $\mathbb{R}$, e aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo a $\tilde{\phi}$ em $\mathbb{R}$.)

(c) $g'(x) \geq 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$ e

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

(d) Como g é ímpar, é suficente considerar $x \geq 0$. Temos que g é limitada em qualquer intervalo $[0, a]$, $a > 0$, uma vez que é contínua (decorre da continuidade do integral indefinido de qualquer função integrável). Para $x \in [a, +\infty[$ podemos majorar $g(x)$ por

$$g(a) + \int_a^x \frac{2}{x^2} = g(a) - \frac{2}{x} + \frac{2}{a} \leq g(a) + \frac{2}{a}.$$

13. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se periódica de período $T > 0$, sse $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x+T)$. Mostre que, se f é contínua e periódica de período $T > 0$, então

a) $G(x) = \int_x^{x+T} f(t)\, dt$ é uma função constante em $\mathbb{R}$.

b) Sendo F uma primitiva de f, F será também periódica de período T se e só se $\int_0^T f(t)\, dt = 0$.

RESOLUÇÃO

a) Usando a continuidade da função integranda para justificar a diferenciabilidade de $G(x) = \int_x^{x+T} f(t)\,dt$ pode derivar-se o integral e usar a periodicidade da função para mostrar que o integral tem derivada nula, pelo que é constante. Com efeito:

$$G'(x) = \left(\int_x^{x+T} f(t)\,dt\right)' = f(x+T) - f(x) = 0$$

(Note-se que a justificação anterior não é possível se não se supuser que f é contínua. No entanto a conclusão continua a ser verdadeira! é necessário nesse caso usar mudança de variável e a aditividade do integral relativamente ao intervalo de integração - verifique!).

b) Se F é uma primitiva de f e é periódica de período T, temos

$$\int_0^T f(t)\,dt = F(T) - F(0) = 0.$$

Reciprocamente, se $\int_0^T f(t)\,dt = 0$ então da alíena anterior, temos

$$G(x) = G(0) = 0 \Leftrightarrow \int_x^{x+T} f(t)\,dt = 0 \Leftrightarrow F(x+T) - F(x) = 0.$$

Logo F é periódica de período T.

Fórmulas de Integração e cálculo de Áreas

14. Calcule o valor dos integrais seguintes:

a) $\displaystyle\int_1^{\pi} x \arctan x\,dx$,

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$,

c) $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 x\,dx$,

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x-3}\,dx$,

e) $\displaystyle\int_2^4 \frac{x^3}{x-1}\,dx$,

f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^t+e^{2t}}\,dt$,

g) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^2 x \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{x}\right)\,dx$,

h) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sqrt{\operatorname{sen} x}\,dx$,

i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx$,

RESOLUÇÃO

a) Por partes,

$$\int_1^\pi x\arctan x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\arctan x\right]_1^\pi - \int_1^\pi \frac{x^2}{2(1+x^2)}\,dx = \frac{\pi^2}{2}\arctan\pi - \frac{\pi}{8}$$

$$-\frac{1}{2}\int_1^\pi (1-\frac{1}{1+x^2})\,dx = \frac{\pi^2}{2}\arctan\pi - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left[x-\arctan x\right]_1^\pi$$

$$=\frac{\pi^2+1}{2}\arctan\pi - \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}.$$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\arctan^2 x\right]_0^1 = \frac{\pi^2}{32}.$

c) $\displaystyle\int_0^\pi \operatorname{sen}^3 x\,dx = \int_0^\pi (1-\cos^2 x)\operatorname{sen} x\,dx = \left[-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x\right]_0^\pi$

$$= -\cos\pi + \frac{1}{3}\cos^3\pi + \cos 0 - \frac{1}{3}\cos^3 0 = \frac{4}{3}.$$

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x-3}\,dx = \left[\ln|x-3|\right]_0^1 = \ln 2 - \ln 3 = \ln\frac{2}{3}.$

e) $\displaystyle\int_2^4 \frac{x^3}{x-1}\,dx = \int_2^4 \left(x^2+x+1+\frac{1}{x-1}\right)\,dx$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1|\right]_2^4 = \frac{80}{3} + \ln 3.$$

f) Fazendo a mudança de variável $x = e^t \Leftrightarrow t = \ln x$,

$$\int_0^1 \frac{1}{e^t + e^{2t}}\,dt = \int_1^e \frac{1}{x+x^2}\,\frac{1}{x}\,dx = \int_1^e \frac{1}{x^2(1+x)}\,dx.$$

Tem-se

$$\frac{1}{x^2(1+x)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x}$$

(verifique) e portanto

$$\int_1^e \frac{1}{x^2(1+x)}\,dx = -1 - \frac{1}{e} + \ln(1+e) + 0 + 1 - \ln 2 = -\frac{1}{e} + \ln\left(\frac{1+e}{2}\right).$$

g) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^2 x\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{x}\right)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{x}\right)\right]_{\sqrt{2}}^2 - \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{x^2}{2}\,\frac{-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\,dx$

$$= 2\operatorname{arcsen}\frac{1}{2} - \operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + \left[\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}\right]_{\sqrt{2}}^2 = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

h) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\sqrt{\operatorname{sen} x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x(1-\operatorname{sen}^2 x)\sqrt{\operatorname{sen} x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x(\sqrt{\operatorname{sen} x} - \operatorname{sen}^{\frac{5}{2}} x)\,dx$

$$= \left[\frac{2}{3}\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} x - \frac{2}{7}\operatorname{sen}^{\frac{7}{2}} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} - \frac{2}{7} = \frac{8}{21}.$$

i) Fazendo a substituição $e^x = t \Leftrightarrow x = \ln t$, temos

$$\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx = \int_1^e \frac{1}{t(1+t)}\,dt = \int_1^e -\frac{1}{1+t} + \frac{1}{t}\,dt$$
$$= \Big[-\ln|1+t| + \ln|t| \Big]_1^e = -\ln(1+e) + 1 + \ln 2.$$

(em alternativa, poderíamos escrever $\dfrac{1}{1+e^x} = \dfrac{1+e^x-e^x}{1+e^x} = 1 - \dfrac{e^x}{1+e^x}$, e notar que temos a diferenças de duas funções com primitiva imediata.)

15. Calcule a área limitada pela elipse de equação $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

RESOLUÇÃO

De $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ temos $y = \pm\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$. A área fica (fazendo a substituição $x = 2\operatorname{sen} t$):

$$A = 4\int_0^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\,dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 t\,dt$$
$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2t + 1)\,dt = 4\left[\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t + t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi.$$

16. Calcule a área limitada pelas linhas de equações:

a) $y = \ln(1+x)$, $y = -\ln(1+x)$, $x = e-1$
b) $y = \ln(1+x^2)$, $y = \ln 2$,
c) $y = \ln x$ e $y = \ln^2 x$,
d) $y^2 = 4(1-x)$ e $y^2 = 2(2-x)$.

RESOLUÇÃO

a) $A = \displaystyle\int_0^{e-1} 2\ln(1+x)\,dx = [2x\ln(1+x)]_0^{e-1} - \int_0^{e-1} \frac{x}{x+1}\,dx$
$= 2(e-1) - 2\displaystyle\int_0^{e-1} 1 - \frac{1}{x+1}\,dx = 2(e-1) - 2\,[x - \ln|x+1|]_0^{e-1} =$
$2(e-1) - 2(e-1) + 2 = 2.$

b) Os pontos de intersecção são em $x = 1$ e $x = -1$ e, em $[-1, 1]$, $\ln(1 + x^2) \leq \ln 2$, logo

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{1} \ln 2 - \ln(1 + x^2)\, dx = 2 \int_{0}^{1} \ln 2 - \ln(1 + x^2)\, dx \\
&= 2 \ln 2 - 2[x \ln(1 + x^2)]_0^1 + 2 \int_0^1 \frac{2x^2}{x^2 + 1}\, dx \\
&= 2 \ln 2 - 2 \ln 2 + 4 \int_0^1 1 - \frac{1}{x^2 + 1}\, dx = 4[x - \arctan x]_0^1 = 4(1 - \frac{\pi}{4}) = 4 - \pi.
\end{aligned}$$

c) As curvas intersectam-se nos pontos $(1, 0)$ e $(e, 1)$, e para $x \in [1, e]$, $\ln x \geq \ln^2 x$. Temos

$$\begin{aligned}
A = \int_1^e \left(\ln x - \ln^2 x\right)\, dx &= \left[x\left(\ln x - \ln^2 x\right)\right]_1^e - \int_1^e x\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x}\ln x\right) dx \\
&= e(1 - 1) - 1(0 - 0) - [x]_1^e + \int_1^e 2 \ln x\, dx \\
&= -e + 1 + [2x \ln x]_1^e - \int_1^e 2\, dx = 3 - e.
\end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned}
A &= 2 \int_0^1 \left(\sqrt{2(2 - x)} - \sqrt{4(1 - x)}\right) dx + 2 \int_1^2 \sqrt{2(2 - x)}\, dx \\
&= 2 \int_0^2 \sqrt{2(2 - x)}\, dx - 2 \int_0^1 \sqrt{4(1 - x)}\, dx = \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

Alternativamente, integrar em y: as linhas são $x = 1 - \dfrac{y^2}{4}$ e $x = 2 - \dfrac{y^2}{2}$ e temos $A = 2 \displaystyle\int_0^2 \left(2 - \frac{y^2}{2} - 1 + \frac{y^2}{4}\right) dy$.

17. Calcule a área de cada uma das seguintes regiões do plano:

a) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + 1)^2 \leq y \leq 2(x + 1)\right\}$, b) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq (1 - x) \arctan x\right\}$.

RESOLUÇÃO

a) Temos $(x + 1)^2 = 2(x + 1) \Leftrightarrow x + 1 = 0 \vee x + 1 = 2 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$ e $2(x + 1) > (x + 1)^2 \Leftrightarrow x \in]-1, 1[$, logo
$A = \displaystyle\int_{-1}^{1} 2(x + 1) - (x + 1)^2\, dx = \left[(x + 1)^2 - \frac{1}{3}(x + 1)^3\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}.$

b) Temos $(1-x)\arctan x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 0$ e $(1-x)\arctan x > 0 \Leftrightarrow x \in]0,1[$, logo

$$A = \int_0^1 (1-x)\arctan x \, dx = \left[(x - \frac{x^2}{2})\arctan x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x - \frac{x^2}{2}}{1+x^2}\, dx$$

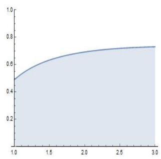
$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}[\ln(1+x^2)]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 1 - \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{1-\ln 2}{2}.$$

18. Calcule a área da região plana limitada pelas linhas definidas pelas equações

$$y = 0 \quad , \quad y = \frac{\ln 2x}{\sqrt{2x}} \quad e \quad x = \frac{e}{2} \ .$$

Resolução.

Um esboço da região,



Designando por A a área da região pretendida, tem-se

$$A = \int_{1/2}^{e/2} \frac{\ln 2x}{\sqrt{2x}}\, dx = \left[\sqrt{2x}\ln 2x\right]_{1/2}^{e/2} - \int_{1/2}^{e/2} \frac{2}{\sqrt{2x}}\, dx = \sqrt{e} - \left[2\sqrt{2x}\right]_{1/2}^{e/2} = 2 - \sqrt{e}\,.$$

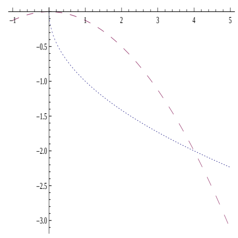
■

19. Calcule a área da região plana limitada pelas linhas definidas pelas equações

$$x = y^2 \quad e \quad x^2 = -8y \ .$$

Resolução.

A figura seguinte descreve a fronteira da região em questão



Estabelecendo $-\sqrt{x} = -x^2/8$ tem-se $x = 0 \vee x = 4$, assim a a seguinte expressão para aárea da região plana

$$\int_0^4 -x^2/8 - (-\sqrt{x})\, dx\,.$$

vindo, da fórmula de Barrow,

$$\int_0^4 -x^2/8 - (-\sqrt{x})\, dx = \left[-\frac{x^3}{24} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_0^4 = \frac{8}{3}\,.$$

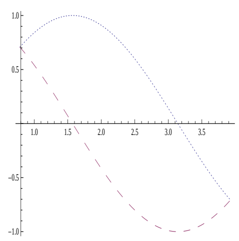
■

20. Calcule a área da região plana A definida por

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4} \wedge \cos x \leq y \leq \operatorname{sen} x\}\,.$$

Resolução.

A figura seguinte descreve a fronteira da região A



A área da região A é dada por:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\operatorname{sen} x - \cos x)\;\, dx\,.$$

Tem-se, pela fórmula de Barrow, que

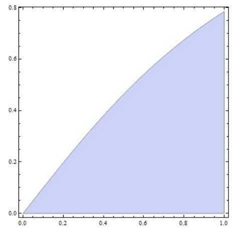
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\operatorname{sen} x - \cos x)\;\, dx = [-\cos x - \operatorname{sen} x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\,.$$

■

21. Calcule a área da região plana limitada pelo gráfico da função $f(x) = \arctan x$ pelas rectas $x = 1$ e $y = 0$.

Resolução.

Apresentando a região plana limitada pelo gráfico da função $f(x) = \arctan x$ pelas rectas $x = 1$ e $y = 0$.



O valor da área da região apresentada é obtido por

$$\int_0^1 \arctan x dx$$

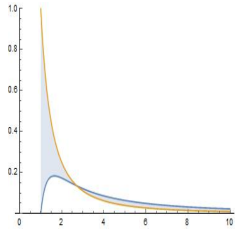
$$\int_0^1 \arctan x dx = (\text{Int.por partes}) = [x \arctan x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - \ln 2)$$

■

22. Calcule a área da região plana situada na região $1 \leq x \leq e^2$ e limitada pelas curvas $y = \ln x/x^2$ e $y = 1/x^2$.

Resolução.



As curvas cruzam-se em $x = e$ na região $x \geq 1$, e $\ln x < 1$ para $1 \leq x < e$. A área da referida região é

$$\int_1^e \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}\right) dx + \int_e^{e^2} \left(\frac{\ln x}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right) dx = \frac{1}{e} + \left(\frac{1}{e} - \frac{2}{e^2}\right) = \frac{2}{e}\left(1 - \frac{1}{e}\right).$$

uma vez que

$$\int_1^e \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}\right) dx = \int_1^e \frac{1}{x^2}(1 - \ln x) dx = (\text{int. por partes}) =$$

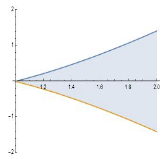
$$= \left[-\frac{1}{x}(1-\ln x)\right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x}(-\frac{1}{x})dx = 1 + \left[\frac{1}{x}\right]_1^e = \frac{1}{e}.$$

e o segundo integral obtém-se diretamente dos cálculos anteriores.

■

23. Calcule a área da região limitada pela curva de equação $y^2 = x(1-x)^2$ e as retas $x = 0$ e $x = \frac{1}{2}$.

Resolução. Esboçando a região tem-se,



A área da região é

$$2\int_0^{1/2} \sqrt{x(1-x)^2}dx = 2\int_0^{1/2} \sqrt{x}\,(1-x)\,dx =$$

$$= 2\left(\int_0^{1/2} x^{1/2}dx - \int_0^{1/2} x^{3/2}dx\right) =$$

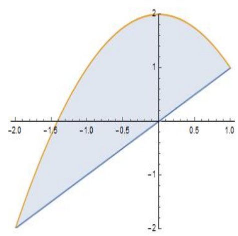
$$= 2\left(\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^{1/2} - \left[\frac{2}{5}x^{5/2}\right]_0^{1/2}\right) = \frac{7}{30}\sqrt{2}.$$

■

24. Calcule a área do seguinte subconjunto de $\mathbb{R}^2$:

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \leq y \leq -x^2 + 2 \;\right\}.$$

Resolução.



A área do subconjunto de $\mathbb{R}^2$ é

$$\int_{-2}^{1} \big((-x^2+2)-x\big)\,dx = \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{1} = \frac{9}{2}.$$

■