

CDI1-2224-25 - LEIC-T, LEE, LETI, LEGI

Primitivação

1. Determine uma primitiva de cada uma das funções:

- |   |   |  |
|---|---|--|
| a) $2x + 3x^2 + 4x^3$ ,                               | b) $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ , | c) $\frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x}}$ ,                  |
| d) $\sqrt[3]{1-x}$ ,                                  | e) $\frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x^3}}{x}$ ,             | f) $2x\sqrt[5]{x^2-1}$ ,                             |
| g) $\frac{e^x}{1+2e^x}$ ,                             | h) $\frac{\cos x}{1+\sin x}$ ,                          | i) $\sin(2x)$ ,                                      |
| j) $\frac{\sin(2x)}{1+\sin^2 x}$ ,                    | k) $\cos^2 x$ ,   | l) $\frac{1}{\cos^2 x}$ ,                            |
| m) $\frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}$ ,       | n) $x \cos(x^2 + 2)$ ,                                  | o) $e^x \sin(e^x)$ ,                                 |
| p) $x^2 \sqrt[3]{1+x^3}$ ,                            | q) $\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$ ,                            | r) $\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$ ,                     |
| s) $\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$ ,                        | t) $\frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}$ ,                         | u) $\frac{x^3}{(1+x^4)^2}$ ,                         |
| v) $\cos^3 x \sqrt{\sin x}$ ,                         | w) $\operatorname{tg}^2 x$ ,                            | y) $(x^2 + 1)^3$ ,                                   |
| z) $e^{x+3}$ ,  | aa) $2^{x-1}$ ,   | ab) $\frac{1}{\sqrt[5]{1-2x}}$ ,                     |
| ac) $\operatorname{cotg} x$ ,                         | ad) $3^{\sin^2 x} \sin 2x$ ,                            | ae) $\frac{\operatorname{tg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ ,  |
| af) $\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ ,                   | ag) $\cos x \cos 2x$ , ,                                | ah) $\sin^3 x \cos^4 x$ ,                            |
| ai) $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^4 x$ , | aj) $\sqrt{2x} + \sqrt{\frac{x}{2}}$ ,                  | ak) $3 \sin x + 2x^2$ ,                              |
| al) $xe^{-x^2}$ ,                                     | am) $\frac{3 \sin x}{(1+\cos x)^2}$ ,                   | an) $x \sqrt{1+x^2}$ ,                               |
| ao) $e^{2 \sin x} \cos x$ ,                           | ap) $\frac{1}{1+e^x}$ ,                                 | aq) $\operatorname{tg} x$ ,                          |
| ar) $\operatorname{tg} x \sec^3 x$ ,                  | as) $\cos^3 x \sin^3 x$ ,                               | at) $\frac{1}{(1+x^2) \operatorname{arctg} x}$ ,     |
| au) $\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$ ,                       | av) $\frac{e^x}{e^{2x}+4}$ ,                            | aw) $\sqrt{\frac{\operatorname{arcsen} x}{1-x^2}}$ , |
| ax) $\frac{x}{\sqrt{1-2x^4}}$ ,                       | ay) $\frac{\cos(\ln x)}{x}$ ,                           | az) $\frac{1}{x \ln x}$ .                            |

2. Determine as funções que verificam as condições impostas em cada uma das alíneas seguintes:

a)  $f'(x) = \frac{1}{4+9x^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ;  $f(0) = 1$ .

b)  $g'(x) = \frac{1}{x-1}$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ;  $g(0) = 0, g(2) = 3$ .

c)  $h'(x) = \sec^2 x$ , para  $x$  no domínio de  $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ ;  $h(k\pi) = k, k \in \mathbb{Z}$ .

3. Para cada uma das funções definidas pelas expressões

$$x \operatorname{sen}(x^2), \quad \frac{e^x}{2 + e^x}, \quad \frac{1}{(1 + x^2)(1 + \operatorname{arctg}^2 x)}$$

, determine se possível:

a) uma primitiva que se anule no ponto  $x = 0$ ;

b) uma primitiva que tenda para 0 quando  $x \rightarrow +\infty$ .

4. Calcule uma primitiva de cada uma das funções racionais (todas imediatamente primitiváveis):

a) $\frac{1}{1-x}$ ,	b) $\frac{1}{(x-3)^3}$ ,	c) $\frac{x+1}{x^2+1}$ ,
d) $\frac{x}{1+(x-1)^2}$ ,	e) $\frac{2x+1}{x^2+4}$ ,	f) $\frac{1}{x^2+2x+2}$ ,
g) $\frac{x^3}{3+x^4}$ ,	h) $\frac{x}{1+x^2}$ ,	i) $\frac{x^3}{x^8+1}$ ,
j) $\frac{x}{(1+x^2)^\alpha}$ ,	k) $\frac{x^2}{1+x^3}$ ,	l) $\frac{1}{2+x^2}$ ,
m) $\frac{x}{1+x^4}$ ,	n) $\frac{1}{1+3x^2}$ ,	o) $\frac{x+1}{x-2}$ .

5. Calcule uma primitiva de cada uma das funções racionais:

a) $\frac{1}{x^2+x}$ ,	b) $\frac{x+1}{x(x-1)^2}$ ,	c) $\frac{x^2+x-4}{x(x^2+4)}$ ,
d) $\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}$ ,	e) $\frac{x^5}{x^2-1}$ ,	f) $\frac{x}{(x+1)(x+2)^2}$ ,
g) $\frac{x^3+2x^2+2x}{(x+1)^2}$ ,	h) $\frac{x^4}{x^4-1}$ ,	i) $\frac{x^3+4x^2-4x}{x^4-16}$ .

6. Determine *todas* as primitivas de cada uma das funções do exercício anterior (nos respectivos domínios).

7. Determine a função  $\psi : ]-1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaz as condições

$$\forall_{x > -1} \psi''(x) = \frac{1}{1+x}, \quad \psi(0) = \psi'(0) = 1.$$

8. Usando o método de primitivação por partes, calcule uma primitiva de cada uma das funções:

- |  |  |   |
|--|--|---|
| a) $xe^x$ ,                                    | b) $x \operatorname{arctg} x$ ,        | c) $\operatorname{arcsen} x$ ,          |
| d) $x \operatorname{sen} x$ ,                  | e) $x^3 e^{x^2}$ ,                     | f) $\ln^3 x$ ,                          |
| g) $x^n \ln x$ , $n \in \mathbb{N}$ ,          | h) $\frac{x^7}{(1-x^4)^2}$ ,           | i) $\operatorname{arcsen}^2 x$ ,        |
| j) $e^x(e^x + x)$ ,                            | k) $e^x \operatorname{sen} x$ ,        | l) $x^3 e^{-x^2}$ ,                     |
| m) $\operatorname{arctg} x$ ,                  | n) $\sqrt{x} \ln x$ ,                  | o) $x(1+x^2) \operatorname{arctg} x$ ,  |
| p) $\frac{x^5}{\sqrt{1+x^3}}$ ,                | q) $\ln\left(\frac{1}{x} + 1\right)$ , | r) $x^2 \ln^2 x$ ,                      |
| s) $\ln^2 x$ ,                                 | t) $\frac{1}{x^3} \cos \frac{1}{x}$ ,  | u) $\cos 2x \ln(\operatorname{tg} x)$ , |
| v) $3x \sqrt{1-x^2} \operatorname{arcsen} x$ , | x) $\frac{\ln x}{(1+x)^2}$ ,           | w) $\operatorname{ch} x \cos x$ ,       |
| y) $3^x \cos x$ ,                              | z) $\cos(\ln x)$ ,                     | zz) $\frac{x^2}{(1+x^2)^2}$ .           |

9. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções, utilizando substituições apropriadas:

- |  |  |  |
|--|--|--|
| a) $\frac{e^{4x}}{e^{2x} + 1}$ ,                           | b) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}(1 + \sqrt[3]{x^4})}$ ,  | c) $\frac{\sqrt{x-1}}{x}$ ,                    |
| d) $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}$ ,                    | e) $\frac{e^{2x}}{(e^{2x}-1)(1+e^x)}$ ,          | f) $\frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}$ ,               |
| g) $\frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}$ , | h) $\frac{\ln x}{x(\ln x - 1)^2}$ ,              | i) $\frac{1}{x + \sqrt[3]{x^2}}$ ,             |
| j) $\frac{1 + \sqrt{x}}{x(4 - \sqrt{x})}$ ,                | k) $\frac{1}{x\sqrt[4]{1+x}}$ ,                  | l) $\frac{1}{1 + e^{2x}}$ ,                    |
| m) $\frac{e^{3x}}{(1 + e^{2x})(e^x - 1)^2}$ ,              | n) $\frac{2 \ln x - 1}{x \ln x (\ln x - 1)^2}$ , | o) $\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x \cos x}$ . |

10. Determine, usando a substituição indicada, uma primitiva de cada uma das funções seguintes:

- |  |  |
|--|--|
| a) $\sec x$ , $t = \sen x$ ,   | b) $\frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}$ , $x = \sec t$ ,                         |
| c) $\sqrt{1 - x^2}$ , $x = \sen t$ ,                                   | d) $\frac{1}{1 + \sen x + \cos x}$ , $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ , |
| e) $\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x^4}$ , $x = \cos t$ ,                       | f) $\frac{e^{x/2}}{\sqrt{1 - e^x}}$ , $t = \sqrt{1 - e^x}$ ,               |
| g) $\frac{\sen x}{1 - \sen x}$ , $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ , | h) $\frac{1}{\sqrt{x(1 - x)}}$ , $x = \sen^2 t$ ,                          |
| i) $\frac{3 \sen x + 3}{\cos x + \sen 2x}$ , $t = \sen x$ ,            | j) $\sec^3 x$ , $t = \sen x$ ,   |
| k) $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ , $x = \operatorname{tg} t$ ,            | l) $\frac{\cos x}{1 + \sen x - \cos^2 x}$ , $t = \sen x$ ,                 |
| m) $\frac{1}{x \sqrt{1 - x^2}}$ , $t = \sqrt{1 - x^2}$ ,               | n) $\frac{1}{\sqrt{1 + e^x}}$ , $t = \sqrt{1 + e^x}$ ,                     |
| o) $\sqrt{4 + x^2}$ , $x = 2 \operatorname{tg} t$ ,                    | p) $\frac{x(x - 1)}{\sqrt{x^2 - 1}}$ , $x = \sec t$ .                      |

11. Determine, utilizando métodos de primitivação adequados, uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

- |   |   |   |
|---|---|---|
| a) $ x $ ,                              | b) $x \operatorname{arcsen} \frac{1}{x}$ ,    | c) $\sen(\ln x + 1)$ ,                  |
| d) $\sen^2 x \cos^2 x$ ,                | e) $\sqrt{x} \operatorname{arctg} \sqrt{x}$ , | f) $\frac{1 + \ln^2 x}{x(1 + \ln x)}$ , |
| g) $\frac{e^{-x}}{e^{2x} - 2e^x + 2}$ , | h) $\frac{1 + x}{1 + \sqrt{x}}$ ,             | i) $\cos^3 x$ ,                         |
| j) $\cos^4 x$ ,                         | k) $x \ln \frac{1 - x}{1 + x}$ ,              | l) $\frac{1}{(x + 1)(x + 2)(x + 3)}$ ,  |
| m) $\frac{\ln(\ln x)}{x \ln x}$ ,       | n) $\ln(x + \sqrt{x})$ ,                      | o) $\frac{1}{x^3 e^{1/x}}$ ,            |
| p) $\cos x \ln(1 + \sen^2 x)$ ,         | q) $\frac{\ln(\ln x)}{x}$ ,                   | r) $x \operatorname{arctg}^2 x$ ,       |
| s) $\frac{\ln(1 + x)}{\sqrt{1 + x}}$ ,  | t) $\frac{1}{\sen x}$ ,                       | u) $\frac{x \cos x}{\sen^2 x}$ ,        |
| v) $\frac{\sen x}{1 + 3 \cos^2 x}$ ,    | w) $\ln(\cos x) \operatorname{tg} x$ ,        | x) $\frac{1}{(x + 1) \sqrt{x + 2}}$ ,   |
| y) $(\operatorname{arccos} x)^2$ ,      | z) $\frac{1}{\cos x(1 - \sen x)}$ .           |   |